Digitized by Google

3 . 231

Digitized by Google

DE
CONTINUITATIS LEGE
ET EJUS CONSECTARIIS
PERTINENTIBUS
AD PRIMA MATERIÆ ELEMENTA EORUMQUE VIRES
DISSERTATIO

AUCTORE

P. ROGERIO JOSEPHO
BOSCOVICH
SOCIETATIS JESU PUBLICO MATHESEOS PROFESSORE

IN COLLEGIO ROMANO.

ROMÆ MDCCLIV.

EX TYPOGRAPHIA GENEROSI SALOMONI

APUD VENANTIUM MONALDINI BIBLIOPOLAM IN VIA CURSUS.

PRÆSIDUM FACULTATE.

Digitized by Google

Digitized by Google

5. 3. 231

1. JAM ab anno 1745. in diſſertatione de Viribus Vivis hoc ipſo in loco publice propoſita, & propugnata, tum in Commentariis Acad. Bononienſis iterum impreſſa tomo 2. propoſuimus theoriam noſtram virium quarumdam, quibus omnia materiæ puncta ſint prædita, & ex quibus tam materiæ ipſius conſtitutio, quam generales omnes, ac præcipuæ quævis e particularibus corporum proprietatibus ſponte fluant, & ut mera quædam conſectaria neceſſario deducantur. Eamdem anno 1748. in ſecunda parte diſſertationis de Lumine hic itidem propoſita multo uberius expoſuimus, & conſectaria præcipua Geometriæ ope deduximus demonſtrationes perſecuti, quarum ope tum alia multa, tum præcipua ſoliditatis in primis, & fermentationis principia innoteſcerent.

2. Porro theoriam ipſam nos quidem non ad arbitrium, ut hypotheſim quamdam, confinximus, ut quibuſdam ex eorum genere, qui parte tantum perlecta de re tota judicare ſolent, eſt viſum; ſed poſitivis argumentis demonſtrare conati ſumus, & quidem ejuſmodi, ut evidenter patere poſſet, non illud a nobis eſſe præſtitum, quod ſæpe in præceptis animo opinionibus fieri ſolet, ut argumenta ipſa undecunque conquiſita ſint ad ſententiam ſynthetico ritu comprobandam utcumque, ſed accurate expoſitam eſſe analyſim eam omnem, quæ nos e ſimpliciſſimis naturæ principiis ad ipſam illam theoriam neceſſario, & ſpontaneo concluſionum nexu perduxerit. Qua in re illud ingenue fateri poſſumus, id nobis omnino nec opinantibus contigiſſe, nec ad theoriam ipſam, cujus uberrimos ſane fructus & tum quidem percepimus, & percipimus in dies, ipſorum nos fructuum amor, quos tum omnino ignorabamus, ſed naturæ indoles, & vis argumentationis pertraxit,

Digitized by Google

3. Præcipuum univerſæ analyſeos noſtræ fundamentum ſitum eſt in celeberrimo illo, quod Philoſophi jam paſſim *Continuitatis principium* appellant, quod quidem jam ab anno 1687. Leibnitius, quamquam nondum hoc uſus nomine, protulit, ac contra Carteſianas motus leges adhibuit in iis, quas Baylius nominavit *Nouvelles de la Rep. des lettres*, tum Leibnitiani alii complures illuſtrarunt, quorum argumenta collegit in Phyſicis Inſtitutionibus Matrona doctiſſima *De Chatellet*. Porro tum quidem ex iis, quæ ad ipſum principium vel explicandum, vel comprobandum, vel vindicandum pertinent, vix quidquam perſecuti ſumus, quanquam habentur ſane multa, & per ſe ipſa ſcitu digniſſima, & non ad ejus principii tantummodo confirmationem, verum etiam ad alias veritates complures deducendas, & præcludendum erroribus multis aditum utiliſſima, ac neceſſaria, quorum aliqua vel in privatis epiſtolis, vel in publicis lectionibus identidem, ubi ſeſe occaſio præbuit, exhibuimus, ac eorum multa, quæ ad Geometricorum Locorum continuitatem pertinent in iis, quæ hoc ipſo anno edidimus Sectionum Conicarum, elementis perſecuti ſumus, fuſiore diſſertatione ad calcem adjecta.

4. Id igitur argumentum in hac ſolemni exercitatione aliquanto ordinatius pertractandum ſuſcipimus, ſperamuſque, explicatis difficultatibus iis omnibus, quæ contra principium ipſum & a pluribus primæ etiam notæ ſcriptoribus, & a doctiſſimis viris vel propoſita jam olim ſunt, vel proponuntur in dies, ipſam illam theoriam noſtram, quæ ſenſim propalari magis jam incipit, ab aliis impugnata, ab aliis in publicis etiam Academiis propoſita, & propugnata, ex hac nova præcipui fundamenti ſui propugnatione adepturam aliquanto plus auctoritatis, & roboris.

5. Quoniam vero ſunt, qui ipſum Continuitatis principium ita impugnant, ut id quidem contradictionem involvere, atque illud, quod maxime excludere nititur, neceſſario involvere arbitrentur, quemadmodum de ſummo noſtri ævi & Mathematico, & Philoſopho Maupertuiſio videbimus paulo infra, primo quidem genuinam ejus principii explicationem ita exhibebimus, ut, ea rite percepta, nihil in ipſo deprehendi poſſit, quod vel ſibi ipſi, vel rectæ rationi non congruat, unde ipſius poſſibilitas profluet, qua conſtituta progrediemur ulterius, & ejus in natura exiſtentiam evincere conabimur.

6. Ut autem ipſius principii Continuitatis notio evadat magis perſpicua, continuæ quantitatis naturam perſequemur primo loco, & eam Geometriæ ope illuſtrabimus, tum ad ipſum Continuitatis principium explicandum faciemus gradum. Continuæ quantitatis natura in eo ſita eſt, ipſo Ariſtotele teſte, quem Leibnitius laudat in ſchediaſmate memorato num.3., quod eorum partes ſe excipientes imm-

immediate communem habeant terminum; ubi ipſe Ariſtoteles Continuitate affirmat deſtitui numeros, eam autem agnoſcit in linea, ſuperficie, corpore, ac in ſpatio, quod appellat locum, & tempore. En ejus locum in *Categoriis cap.6. de quanto* ex editione Pariſienſi anni 1619. *Diſcretum eſt, ut numerus .... Continuum eſt, ut linea, ſuperficies, corpus, & praeterea locus, ac tempus. Nam partium numeri nullus eſt communis terminus, quo eæ partes conjungantur .... At vero linea eſt continua; quia communem terminum ſumere licet, quo partes ejus conjunguntur, nempe punctum. Et ſuperficiei quoque communem terminum accipere licet lineam, quoniam plani partes communi quopiam termino conjunguntur. Itidemque in corpore potes accipere communem terminum lineam, vel ſuperficiem, qua corporis partes conjungantur. Ejuſmodi eſt etiam tempus, & locus. Nam præſens tempus conjungitur cum præterito, & cum futuro. Rurſus locus in continuis eſt, quia locum aliquem continent partes corporis, quæ communi aliquo termino copulantur. Igitur etiam loci partes, quas continent ſingulæ corporis partes, communi aliquo termino copulantur.* Hæc Ariſtoteles, quæ nos paulo fuſius, & accuratius perſequemur.

7. Concipiatur in fig.1.linea ABCD, quæ ſit interrupta in B, C. Ibi continuitas læditur, quia B finis partis AB præcedentis, diſtat a C principio partis CD, quæ ipſam AB immediate conſequitur. Contra vero linea AEB eſt continua, quia idem punctum E eſt limes communis partis AE, & partis EB.

8. In quavis continua quantitate diſtingui debet id, quod eſt terminus, ſeu limes, ab eo, cujus eſt terminus. Illud primum in ea ratione, in qua eſt terminus, debet eſſe indiviſibile, hoc ſecundum debet eſſe diviſibile in infinitum. Lineæ terminus eſt punctum, ſuperficiei terminus eſt linea, ſolidi terminus eſt ſuperficies. Linea ſecundum longitudinem eſt diviſibilis in infinitum, punctum vero indiviſibile: ſuperficies eſt diviſibilis ſecundum & longitudinem, & latitudinem linea autem, quæ ipſam terminat, ſecundum latitudinem indiviſibilis eſt, licet ſecundum longitudinem, ſecundum quam cum ipſa ſuperficie protenditur, diviſibilis ſit, ac idem in ſuperficie accidit reſpectu ſolidi, quæ craſſitudine, qua ipſum terminat, omnino caret.

9. Porro terminum, ſeu limitem eſſe indiviſibilem in ea ratione; qua limes eſt, evidenter conſequitur ex ipſa termini, ſeu limitis notione. Si enim is diviſibilis eſſet, & partes haberet, jam non totus ad limitem pertineret, ſed interior pars pertineret ad id, cujus pars exterior eſſet limes. Qui diſcurſus cum in ipſa parte exteriore redeat, manifeſto conſequitur, id, quod eſt limes, indiviſibile eſſe, ac proinde punctum debet eſſe penitus indiviſibile, linea indiviſibilis ſe-

lis ſecundum latitudinem, ſuperficies ſecundum craſſitudinem, ſive profunditatem.

10. Ex ipſa termini natura conſequitur etiam illud, terminum termino contiguum eſſe non poſſe. Nam ſemper haberi debet, illud continuum ipſis interjacens, cujus ii ipſi termini ſunt. Neque alter poteſt eſſe finis præcedentis, & alter principium ſequentis, cum ex natura continui (num.6.) communis eſſe debeat eorum terminus. Idem autem conficitur adhuc evidentius ex ipſius termini indiviſibilitate. Indiviſibilia enim vel a ſe invicem diſtant, vel, diſtantia ſublata, in unicum coaleſcunt. Nam quæ extenſione omnino carent, vel ſe non contingunt, vel ſe contingunt ſecundum ſe tota. Diſtant in primo caſu; compenetrantur, & in unicum coaleſcunt in ſecundo. Sibi ipſi vim inferat oportet, qui punctum puncto contiguum concipiat, & tamen extra ipſum poſitum, nec compenetratum. Concipiet globulos quoſdam extenſos, qui globuli ex una parte ſe contingant, ex alia a ſe invicem recedant, ubi partes ejuſdem puncti admittet, & indiviſibilitatis, ac inextenſionis ideam deſtruet. Eſt id ſane vetuſtiſſimum argumentum, quo ſemper Zenonis ſententia continuum extenſum componentis ex punctis penitus inextenſis confutata eſt, cujus ſolutionem aptam nemo huc uſque exhibere potuit, nemo profecto exhibebit in poſterum, cum abſolutiſſimæ demonſtrationis, atque evidentiæ vim habeat.

11. Multa autem horum obſcuriſſima videntur iis, qui in ſuarum idearum originem altius non penetrarunt, nec ab iis, quas per ſenſus hauſerunt, ſatis norunt alias per reflexionem efformare rectæ rationi, & rerum naturæ magis conformes. Non indiviſibilia tantummodo, & inextenſa, verum etiam diviſibiles magnitudines numero infinitæ noſtros ſenſus effugiunt, qui, ubi ad quoſdam imminutæ magnitudinis limites deventum eſt, nos omniuo deſtituunt. Hinc a prima infantia, tam per viſum, quam per tactum, diviſibilium, & extenſarum quantitatum perceptiones hauſimus innumerabiles, quibus ita paullatim aſſuevimus, ut quotieſcumque puncti cujuſpiam ideam excitare volumus in noſtris mentibus, globuli cujuſdam extenſi in longum, latum, & profundum excitemus ideam, quem globulum alteri globulo adjungimus, & longiſſimum etiam ipſorum ordinem globulorum conſideramus. Accedat ſenſuum perceptioni reflexio. Conſideretur illud, finitam extenſionem quamcumque debere habere ſuum finem, nec id, quod partes habeat, poſſe interioribus ſui partibus finem eſſe, & patebit illico finem revera haberi, ac partibus, & extenſione carere, nec poſſe inextenſum ab inextenſo contingi, quin ſimul coeant.

12. Ve-

12. Verum ut ipſi imaginationis imbecillitati indulgeatur, oſtendemus, quo pacto ii etiam, qui communem amplectuntur ſententiam de continua extenſione materiæ (nam nos materiam ipſam, ut infra patebit, componimus ex punctis prorſus indiviſibilibus, & inextenſis, a ſe invicem aliquo ſemper vacuo penitus intervallo disjunctis) cogantur omnino agnoſcere puncta penitus indiviſibilia, & inextenſa, lineas latitudine, ſuperficies & latitudine, & longitudine deſtitutas, ubi illam adhibebimus imaginem, qua in primo tomo noſtrorum Elementorum, in ipſo nimirum Geometriæ veſtibulo uſi olim ſumus, cum in hanc noſtram theoriam nondum incidiſſemus, ad oſtendendum ſuperficies, lineas, puncta in ipſa reali continua extenſione eſſe aliquid, non a noſtra mente confictum, ſed in iis ipſis revera exiſtens, & ad ipſam continuam extenſionem inſeparabiliter pertinens.

13. Sit tabula ABDC continua, & affabre perpolita, cujus dimidium EFDB concipiatur coloris nigri, alterum autem dimidium AEFC coloris albi. Profecto oculis ipſis ſubjicietur limes EF inter partem album, & nigram, de quo veriſſimè affirmabitur habere tantam longitudinem, quanta eſt longitudo tabulæ, ſed latitudine carere prorſus. Utcumque enim parum declines hinc, vel inde a limite, vel in albo colore eris, vel in nigro. En ideam lineæ habentis longitudinem, & latitudine carentis. Quod ſi tabula concipiatur craſſior, & diaphana, ut e criſtallo, ac per totam craſſitudinem ejus dimidium nigri, alterum vero dimidium albi coloris ſit, oculis ipſis introſpicienti apparebit limes inter album, & nigrum tractum in longitudinem, & latitudinem protentus, quanta eſt tabulæ longitudo, & craſſitudo; ſed craſſitudine carens. Quod ſi quatuor diverſis coloribus tinctæ intelligantur quatuor partes AEIG, GIFC, FIHD, HIEB; binæ habebuntur lineæ GH, EF ita ſe interſecantes in unico puncto I, ut id ipſum punctum nullam omnino extenſionem habeat, nullas partes. Quamobrem & puncti idea habebitur.

14. Novimus ſane colores diverſos expoſcere diverſum particularum textum, nec poſſe continuam tabulam hujus potius, quam alterius coloris eſſe. Idcirco diximus *intelligatur* ejuſmodi tabula iis imbuta coloribus. At id ideæ limitis, & ejus indiviſibilitatis efformandæ nihil obeſt, & facile a ſenſibili colorum imagine ad ſectionem ſimplicem tabulæ mentis acies transferetur. Secetur igitur ejuſmodi continua tabula tranſverſim per EF: tum partes ſectione divulſæ iterum admoveantur ad ſe invicem uſque ad contactum. Oculis quidem non apparebit limes inter partem dexteram, & ſiniſtram; erit tamen, & alicubi ab altera ad alteram tranſitus fiet. Extendetur is limes per totam tabulæ craſſitudinem in longum, & latum, & ſuperficiem bina ſolida dirimentem exhibebit. In ipſa ſuperficie extima ſectio longitudinem

dinem habebit EF, & partem alteram ſuperficiei ab altera dirimet; ac lineam reddet. Nova autem ſectio GH, ubi priori occurret in I, punctum præbebit indiviſibile, & inextenſum.

15. Jam vero hic facile admodum intelligi poterit illud, ſuperficiem ſuperficiei ſecundum craſſitudinem, lineam lineæ ſecundum latitudinem, punctum puncto ſecundum longitudinem immediatè adhærere non poſſe, ſed vel congruere debere, vel diſtare. Facta enim illa ſectione per EF, evidentiſſimum eſt, novam ſectionem fieri non poſſe, quæ vel cum illa priore non congruat, vel inter ſe, & illam priorem aliquid tabulæ non intercipiat. Si partes tabulæ ſe contingant, evidentiſſimum eſt, novam ſectionem fieri non poſſe priori contiguam, ſine ulla intermedia tabulæ particula. Atque id ipſum profluit manifeſto ex eo, quod ſectio illa ſit limes communis utrique parti tabulæ, & prorſus indiviſibilis in ea ratione, in qua eſt limes.

16. Conſequitur ex his, in ſententia communi de continua materiæ extenſione ſuperficiem, lineam, punctum non eſſe aliquid mente noſtra confictum, ſed revera exiſtere debere in ipſa illa reali extenſione materiæ, cujus extenſionis erunt affectiones quædam: erunt termini, inſeparabiles ab iis, quorum affectiones ſunt, ut nimirum non poſſit ſuperficies per ſe ſolam exiſtere tanquam velum quoddam craſſitudine carens, linea ut quædam virgula & longitudine, & latitudine deſtituta, punctum ut granulum quoddam ab omni extenſione immune; ſit tamen ſuperficies ſolidi per ſe exiſtentis limes realis, linea realis ſuperficiei limes, punctum realis limes lineæ, ac proinde primam Euclidis definitionem, & omnes Geometrarum demonſtrationes in ea communis realis continuæ extenſionis ſententia vim habere ſuam.

17. Nos quidem, qui continuam materiæ extenſionem nequaquam admittimus, puncta realia indiviſibilia agnoſcimus per ſe exiſtentia ſine ulla linea, & ſine ſuperficie ulla, aut ſolido reali; ac proinde in materia nullam ſuperficiem, nullam lineam, nullum admittimus ſolidum: adhuc tamen lineam continuam admittimus in motu, quem continuum eſſe debere patebit infra, ac extenſionem continuam in longum, latum, & profundum in ſpatio, quo noſtra continentur puncta, & per quod excurrunt, admittimus omnino, quod quidem ejuſmodi trinam dimenſionem habere manifeſtiſſimum eſt ex ipſis motibus, quaquaverſum directis. Verum quid de ipſo ſpatio ſentiamus, & in quo per nos ejus continuitas ſita ſit, aperiemus inferius. At ejuſmodi trina extenſione ſemel in eo admiſſa, manifeſto conſequitur, in ipſo itidem debere admitti ſuperficies carentes craſſitudine, lineas latitudine, puncta dimenſione quacumque deſtituta, quibus admiſsis, manet itidem omnis Geometricarum demonſtrationum vis

in iis

Digitized by Google

in iis omnibus, quæ pertinent ad ipſam ſpatii extenſionem continuam.

18. Hiſce expoſitis, quæ pertinent ad indiviſibilitatem terminorum, ſeu limitum, progrediendum ad eorum, quæ ipſis limitibus continentur, diviſibilitatem in infinitum. In primis id, quod binis indiviſibilibus terminis continetur, debet dividi poſſe, & partes habere. Si enim id indiviſibile eſſet, & partibus careret, non poſſet limiti utrilibet contiguum eſſe (num. 10.), ſed cum eo compenetrari deberet, ac prorſus congruere. Congruerent igitur bini ipſi limites etiam inter ſe, nec bini eſſent a ſe diſtantes, ſed in unicum coaleſcerent. Facta autem diviſione, jam inter novum limitem, & utrumque e prioribus iterum interjacere debebit diviſibile aliquid, & eodem argumento redeunte, diviſio continuari poterit in infinitum. Sic quævis linea binis punctis interjecta dividi poterit in infinitum eo ipſo, quod ſemel in binas partes dividi poſſit. Facta enim ejuſmodi diviſione in binas partes communi puncto terminatas, ipſæ iterum partes hinc novo puncto, inde altero e præcedentibus terminabuntur, adeoque iterum debebunt diviſibiles eſſe; qui diſcurſus recurrit ſemper ſine ullo fine.

19. Et hoc quidem pacto continui extenſi diviſibilitas in infinitum, ex ipſa extenſionis continuæ natura, & terminorum indiviſibilitate conficitur. Eadem in Geometria innumeris ſane argumentis ita evincitur, ut nullus dubitationi locus ſuperſit. Illam incommenſurabilium quantitatum relatio nullis ſubjecta numeris, illam anguli contactus a majorum circulorum arcubus perpetuo ſecti, illam aſymptotica curvarum crura indefinite producta oculis fere ipſis objiciunt. Quid illud, quod generaliter ſolvitur in Elementis ipſis problema, datam rectam in datum partium numerum ſecare, a data recta imperatam partem abſcindere, datis binis rectis quibuſcumque tertiam continue proportionalem invenire, quorum problematum priora duo ipſam lineæ cujuſvis diviſibilitatem exhibent in infinitum, tertium vero illud oſtendit, magnitudinem quamcumque ita ultra quoſcumque determinatos limites imminui poſſe, ut poteſt ultra limites quoſcumque determinatos augeri? Si enim e binis datis maneat ſecunda, ac prima augeatur utcumque, tertia continuè proportionalis minuetur quantum libuerit.

20. Et quidem ipſa ejus problematis ſolutio fontem aperit ejus præjudicii, quo in ipſa diviſibilitate in infinitum, ac imminutione magnitudinis ultra quoſcumque limites concipienda laboramus. Aſſuevimus enim ab ipſa infantia contemplationi magnitudinum illarum, quæ ad noſtri corporis magnitudinem haud ita magnam proportionem habent. Vidimus in ejuſmodi magnitudinibus numerum partium, quæ noſtris ſenſibus percipi poſſent non ita magnum contineri.

B Facile

Digitized by Google

Facile nobis perſuaſimus, diviſione continua citò deveniri debere ad magnitudines, quæ noſtros ſenſus effugiant. Et vero, quæ ſub noſtros ſenſus non cadunt, habere vulgo ſolemus prô nullis, qui præcipuus eſt præjudiciorum communium fons, numquam ſatis præcluſus, atque obſtructus, vel ſi reflexione aliqua ideas per ſenſus acquiſitas corrigimus, plerumque parum infra ipſum ſenſuum limitem deſcendimus, ac velut oppreſſi deficimus. Pauci acriore mentis acie, atque animi audentiore vi ſeſe altius attollunt, & præjudiciis omnibus ſepoſitis, ſolam rationem, ſolam rerum naturam conſiderant. Proderit autem mentis imbecillitatem imaginibus quibuſdam identidem corroborare, quæ ut oculis teleſcopia ſolent remotiſſimos Aſtrorum globos admovere, ita menti ipſi abſtruſiſſimas, & obductiſſimas veritates, veluti ex fundo quodam erutas, præſentes quodammodo ſiſtant, & contemplandas proponant.

21. Ac primo quidem ut amoveatur difficultas illa, quam experimur in concipienda tanta partium multitudine in quacumque perquam exigua quantitate, concipiamus hominem aliquem magnitudinis ita immanis, ut totidem vicibus nos ſuperet, quot vicibus univerſus Telluris globus ſuperat illam exiguam quantitatem. Ille homo eandem habebit difficultatem in concipienda multitudine partium Telluris totius, quam nos in ea concipienda in illa quantitate perquam exigua. Magnum, & parvum reſpectiva ſunt, & liceret hominum ſeriem eadem lege majorum augere in immenſum ſupra nos, vel imminuere infra nos, ac quæ aliis eſſent ad ſenſum prorſus indiviſibilia, aliis contra immenſam viderentur extenſionem, & partium numerum continere.

22. Verum ut & poſitivum argumentum diviſibilitatis in infinitum communi captui accomodemus, concipiantur in communi ſententia materiæ habentis extenſionem continuam binæ regulæ craſſæ quantum libuerit, ſed ex altera ſaltem parte rectiſſimæ, ac ſatis longæ, ut palmorum 100. ſingulæ. Id in ea ſententia omnino fieri poteſt, nam ſi quid a rectitudine aberrat hiatu quodam, ſuppleri poterit implendo, ſi quid exuberet, poterit demi. Ex natura rectitudinis evidentiſſimæ ſunt binæ hujuſmodi propoſitiones. 1. *Si binæ ea regulæ ſe contingunt in fine, ac in vertice diſtant, diſtant itidem in medio.* Nam evidentiſſimum eſt, ſi per 50. palmos prorſus congruant, non poſſe alteram ab altera deinde recedere, niſi altera, vel utraque a rectitudine deflectat. 2. *In eodem caſu diſtant in medio a ſe invicem minus, quam in vertice.* Nam ſi per 50. palmos prorſus nihil ad ſe invicem accedunt, ne poſt alios quidem 50. acceſſuras quidquam, evidentiſſimum ſane eſt, nec ullum unquam invenimus, cui cum hæ veritates primo proponerentur, non eas ſibi evidentiſſimas eſſe profiteretur.

23. Iis

Digitized by Google

23. Iis autem poſitis concipiantur primo die ita collocatæ ejuſmodi regulæ, ut ſe in fundo contingant, & in vertice diſtent dato quovis intervallo, ut uno digito. Per primam propoſitionem diſtabunt etiam in medio, & per ſecundam in medio minus, quam in vertice. Secundo die poterunt collocari a Deo ita, ut in vertice diſtent, quantum primo die diſtabant in medio. Eo die dempta erit digiti pars. Nam pridie minus diſtabant in medio, quam in vertice, adeoque ſecundo die in vertice minus diſtant, quam primo. Eo autem ſecundo die cum in vertice diſtent, diſtabunt pariter in medio, ac in medio quidem minus, quam in vertice. Quare tertio die collocari poterunt ita, ut in vertice diſtent, quantum ſecundo diſtabant in medio, & eodem argumento conficitur, eodem tertio die alteram ex illo digito particulam demptam eſſe. Porro idem præſtari poterit quarto die, & ſequentibus omnibus ſine ullo fine. Nullus enim advenire poterit dies, in quo eamdem operationem non liceat perſequi. Nam ſi dicatur adveniturum tandem aliquem diem, in quo progredi non liceat, fatendum erit, pridie ejus diei adhuc idem illud præſtitum fuiſſe, adeoque ipſo pridie regulas in vertice fuiſſe apertas. Quamobrem apertæ fuerunt etiam in medio, & proinde poſtridie collocari poterunt ita, ut in vertice apertæ ſint, & ea collocatione facta, poſtridie etiam in medio diſtare debent. Quotidie igitur auferri poterunt novæ ſemper partes illius ipſius digiti, atque id ſine ullo fine, adeoque ille digitus, & quodvis aliud intervallum, pro quo ſemper idem argumentum redit, dividi ſemper poteſt ulterius in infinitum.

24. Hoc quidem argumentum innititur totum principio Geometrico: *binæ rectæ non habent ſegmentum commune*, & illi theorematì itidem Geometrico: *in triangulis ſimilibus latera homologa ſunt proportionalia*. Nam binæ regulæ cum binis intervallis continent bina triangula iſoſcelia ſimilia, & proinde intervallum in medio, quod vi ejus principii ſemper erit aliquod, debet eſſe dimidium intervalli in vertice. Verum pro iis, qui Geometricis demonſtrationibus vel minus aſſueverunt, vel fidem abrogandam cenſent, vim habet quandam ex craſſo illo 50. palmorum intervallo, per quod regulæ rectæ congruere non poſſunt, quin totæ congruant, & ex defectu diſtantiæ in medio a diſtantia in vertice aſſumpto indefinite, nulla triangulorum, & proportionum ratione habita. Vis autem omnis in eo ſita eſt, quod aſſumpto intervallo quovis, inveniri poteſt intervallum ipſo minus, quod ubi ſemel demonſtratum ſit, progreſſus in infinitum neceſſario conſequitur, ut ſupra in biſſectione pariter accidit. Patet autem, qui ejus argumenti vim velit infringere, ipſum omnino negare debere poſſibiles regulas prorſus rectilineas, vel rectitudinis

 ideam,

ideam, quam habemus clariſſimam, confundere, atque corrumpere: quæ effugia quam miſera ſint, nemo non videt.

25. In noſtra ſententia de extenſione non continua materiæ idem argumentum vim habere eamdem poteſt, ſi concipiantur collocata tria puncta in directum, quorum medium diſtet a ſummo, & imo palmis 100, tum in vertice in diſtantia itidem palmorum 100 ab imo, & in diſtantia unius digiti a ſummo concipiatur collocatum quartum punctum, tum inter hoc, & imum illud in medio in directum punctum quintum, inter quod, & ſecundum illud medium priorum trium habebitur neceſſario ex natura rectitudinis intervallum aliquod, & minus intervallo quarti illius a ſummo, unde eâdem progreſſione eadem habebitur diviſibilitas in infinitum. Sed ea & ex ipſa continuæ extenſionis natura, & ex innumeris Geometricis demonſtrationibus, & ex hoc ipſo argumento ſuperius allato, & ad communem captum accommodato magis, ita eſt evidens, & manifeſta, ut in dubium a ſano homine revocari omnino non poſſit.

26. Illud tantummodo ante, quam progrediamur, hic notandum omnino eſt, omnia hujuſmodi argumenta evincere diviſibilitatem in infinitum intervalli, ſeu ſpatii extenſi continui, non vero materiæ. Nam in primis ſunt nonnulli, qui cenſent indiviſibilem, & ſimpliciſſimam materiæ particulam extendi in longum, latum, & profundum, ſive extendi per ſpatium diviſibile ita, ut id occupet ſpatium, quod decem, vel centum ejuſmodi ſimplices particulæ, ſed minus extenſæ, occupare poſſent, quam Peripateticorum nonnulli appellarunt extenſionem, & diviſibilitatem virtualem, quin immo nonnulli ex iis ipſam eandem particulam putarunt jam plus occupare ſpatii, jam minus, quæ iidem dixerunt *puncta inflata*. Ejuſmodi autem extenſionis genus explicabant exemplo animæ rationalis, quam ſimplicem, & prorſus indiviſibilem admittebant extenſam per totum corpus, vel per certam corporis partem utique diviſibilem, & Divinæ immenſitatis exemplo, quæ in omnibus ſpatii punctis utcumque a ſe remotis ſemper eſt præſens. Ea quidem ſententia nobis nunquam arridere poterit, cum analogiæ Naturæ, & inductioni deſumptæ ab iis, quæ videmus omnino contraria ſit, cum nimirum quidquid materiæ cernimus in diverſa ſitum ſpatii parte, quantum obſervatione colligere licet, diſtinctum videamus, ac ſeparabile a ſe invicem. Adhuc tamen in ea ſententia, quæ quidem nullis metaphyſicis, vel geometricis argumentis evidenter falſa demonſtrari poteſt, ſuper unica indiviſibili particula omne figurarum, & ſectionum genus concipi poteſt, ſine ullis realibus ejuſdem partibus, in qua eadem dividi poſſit.

27. Deinde in noſtra etiam ſententia materiæ conſtantis punctis prorſus indiviſibilibus, & inextenſis, ac a ſe invicem ſemper disjunctis inter-

intervallo quopiam, poteſt maſſa quædam conſtare punctis tantummodo mille, quæ ſolum in mille partes ita ſecari poterit, ut earum quælibet aliquid materiæ contineat, aucto vero partium numero, ſecabuntur jam vacua intervalla, & partes reliquæ debebunt omnino carere materia, cujus puncta, vel intra mille particulas erunt ſpatii ab illa mole comprehenſi, vel in limitibus inter contiguas particulas.

28. Demonſtrata limitum indiviſibitate, & diviſibilitate eorum, quæ iis limitibus terminantur, deducenda ſunt quædam, quæ ad naturam continui cujuſvis, & legis continuitatis ipſius probe intelligendam, ac ad evitandos errores quamplurimos, in quos non vulgus tantummodo labitur, verum etiam doctiſſimi ſæpe, ac primæ notæ Auctores a præjudiciis ſeducti ita alte inſidentibus animo, ut necopinanter inter argumentandum ſenſim irrepant, & ſe furtim inſinuent. Dicemus autem de punctis, & linea, ac quæcumqne de iis dicuntur, applicari debent ceteris omnibus terminis, & terminatis continuis quantitatibns, ut lineis, & ſuperficiei, ſuperficiebus, & ſolido.

29. In primis evidenter conſequitur ex iis, quæ demonſtrata ſunt, puncta non eſſe partes lineæ, ſed terminos ita, ut linea non e punctis, ſed e lineolis componatur, & in lineolas reſolvatur. Nam diviſione in infinitum continuata, ſemper lineæ cujuſpiam partes ſunt aliæ lineæ binis ſingulæ extremis punctis terminatæ. Linea nimirum deſcribitur ductu, vel excurſu continuo puncti, non additione, & repetitione ejuſdem adnexi.

30. Deinde evidenter itidem colligitur, nullam eſſe dati cujuſpiam intervalli partem omnium minimam, cum cujuſvis lineæ pars ſit itidem linea, & quævis linea in infinitum itidem diviſibilis ſit. Quamobrem nomen partis in extenſione continua neceſſario in ſe includit partium plurium conjunctionem, adeoque nulla eſt pars, quæ tota ita ſit prima, vel ultima dati intervalli, ut in ipſa non contineatur aliquid, quod aliud ante ſe habeat in initio, & poſt ſe in fine. Ipſum partis nomen vagum eſt, & indeterminatum. Si determinetur numerus partium æqualium determinati intervalli, determinabitur ſingularum magnitudo: ſi determinetur magnitudo, determinabitur numerus, & in utroque caſu aliqua erit prima, & ſecunda, aliqua ultima, & penultima. Sed nec magnitudine, nec numero definito, nomen partis aliquid indeterminatum ſignificat; nec interroganti, quot partes ſint in dato intervallo, determinate reſponderi poteſt, niſi determinetur earum magnitudo, qua determinata numerus etiam determinatur; poteſt autem reſponderi indeterminata quadam reſponſione, numerum partium eſſe finitum in infinitum. Nimirum determinata quavis magnitudine partium eſſe finitum, ſed quoniam ea in infinitum minui poteſt, poſſe itidem augeri numerum ipſum in infinitum ita,

Digitized by Google

ita, ut ordinum numerus nullus ſit, & particularum in quovis ordine numerus ſit ſemper finitus. Ea reſponſio in ſententia communi continuæ extentionis materiæ majorem aliquam difficultatem habet; in noſtra, in qua intervallum, ſeu ſpatium, ut infra videbimus, nihil continet reale actu exiſtens, & diviſibilitas nihil eſt aliud, niſi, ut ita dicamus, *interſeribilitas punctorum realium*, habet omnino nullam.

31. Demum, quod maxime notandum eſt, in quovis intervallo determinato habetur ſemper primum punctum, & ultimum, ſed nullum eſt ſecundum, aut penultimum. Cum enim inter bina puncta ſemper (num. 10.) linea interjacere debeat, & ipſa linea (num. 18.) ſit itidem diviſibilis, evidentiſſime conſtat, nullum eſſe punctum ita alteri puncto proximum, ut alia propriora non adſint, adeoque nullum ſecundum, nullum penultimum. Quod ſi quis de ipſis punctis quærat, quot ſint in dato intervallo in ſententia communi continuæ extenſionis materiæ, dicendum eſt ea numerum omnem excedere, ſeu eſſe numero infinita. Nam ante quam per actualem diviſionem partes ſeparentur, ipſæ omnino a ſe invicem diſtinctæ ſunt, & una non eſt alia, adeoque & terminum ſuum habent, qui ibi exiſtit. Quare tot puncta exiſtunt actu in ejuſmodi linea, quot diviſiones fieri poſſunt, cumque numerus diviſionum, quæ fieri poſſunt, quovis finito major haberi poſſit, numerus punctorum actu exiſtentium habetur itidem quovis finito major, adeoque eſt infinitus. At in noſtra ſententia, in qua numerus punctorum ſpatii eſt ſola poſſibilitas punctorum realium interſerendorum, reſpondetur itidem, ut in partibus, eorum numerum eſſe finitum in infinitum: nimirum punctorum actu exiſtentium numerum ſemper in ſe determinatum fore, & finitum, ſed eum ipſum ſemper augeri poſſe ſine ullo fine: non autem poſſe ſimul exiſtere ea omnia, quæ ſeorſum conſiderata poſſunt exiſtere ſeorſum, ne Divina ipſa Omnipotentia exhauriatur, de quo iterum infra.

32. Conſequitur ex præcedenti & illud, nulli lineæ poſſe auferri poſtremum, aut primum punctum tantummodo, ſed vel infinita numero puncta auferri ſimul, ablata lineolæ parte, vel relinqui debere, etiam illud poſtremum. Nam ablato ultimo, vel primo puncto, linea adhuc remaneret terminata, adeoque terminum haberet, & proinde ultimum, vel primum punctum, quod proinde ante ultimi illius, vel primi ablationem fuiſſet penultimum, vel ſecundum, quod, ut vidimus, eſt impoſſibile. Idem in quavis alia continua ſerie quantitatum obtinebit, ut ſuperiora omnia. Nimirum ultimus terminus tantummodo, vel primus deeſſe non poterit, exiſtentibus omnibus reliquis, ut linea ultima finitæ ſuperficiei, ſuperficies finiti ſolidi, & ita porro, cujus in lege continuitatis ſtabilienda uſus iterum occurret inferius.

33 In-

Digitized by Google

33. Inter ea autem, quæ continua ſunt, tempus quoque numerari debet, ut ex ipſo etiam Ariſtotele vidimus. Tempus enim continuo fluit, & ſine ullo intermedio hiatu partes ipſius ſibi continuo ſuccedunt aliæ aliis. Hinc in ipſo tempore diſtinguendum erit, ut in linea, tempus continuum, ut hora, a termino, vel limite dirimente bina continua tempora, quod appellabimus momentum. Illud reſpondebit lineæ, hoc puncto. Momentum erit indiviſibile, ut punctum, tempus continuum erit diviſibile in infinitum, ut linea. In tempore continuo, ut in linea, nulla erit particula utcumque parva, qua minor haberi non poſſit, nullum temporis intervallum ita erit magnum, ut majus aliquod haberi non poſsit. In temporis continui menſura aliqua determinata, nulla erit particula, quæ tota ſit prima, vel ultima. Habebitur ſemper in quovis intervallo finito temporis momentum primum, & ultimum, non habebitur ſecundum, & penultimum, ſed binis momentis quibuſcumque, utcumque proximis, quod maxime notandum eſt, interjacebit tempus continuum, in quo alia momenta erunt utrilibet ex extremis propiora, ut de punctis in linea diximus. Ut fluxu puncti continuo non repetitione, & multiplicatione generatur linea, ita duratione rei continua, quæ ſingulis momentis exiſtit, tempore continuo durat, generatur tempus.

34. In iis omnibus ſpatium, & tempus omnino ſibi reſpondent, nec aliud eſt diſcrimen inter ipſa, niſi quod ſpatium, & lineas habet dimenſionis unius, & ſuperficies binarum, & ſolida trium, ac proinde in lineis, & longitudinem, & poſitionem, ſive directionem mutare poteſt, tempus vero unicam tantummodo dimenſionem habet, & ſola diuturnitate variatur, nullo directionum diſcrimine, ſoli lineæ analogum.

35. Ex lineæ, & temporis continuarum quantitatum relatione, oritur motus continuus, & celeritas, quæ poteſt conſiderari tam in ipſo actuali motu, quam in determinatione, quam habet mobile ad motum, quarum primam in diſſertatione de Viribus Vivis appellavimus ſatis apto Scholaſticorum vocabulo *velocitatem in actu ſecundo*, ſecundam *velocitatem in actu primo*. Motus continuus eſt is, in quo punctum mobile ita locum perpetuo mutat, ut ſingulis momentis temporis reſpondeant ſingula ſemper alia, atque alia ſpatii puncta. Si punctum mobile conjungat idem ſpatii punctum cum finito aliquo momentorum numero a ſe invicem per intervalla quædam diſtantium, habebitur regreſſus puncti mobilis ad idem punctum ſpatii; ſi conjungatur idem punctum ſpatii cum ſerie continua momentorum omnium finito aliquo tempore continuo contentorum, habebitur quies. Contra ſi conjungatur idem momentum temporis cum finito numero punctorum ſpatii a ſe invicem finito aliquo intervallo diſtantium, habe-

Digitized by Google

habebitur illa, quæ dicitur replicatio: ſi conjungatur idem momentum temporis cum ſerie continua punctorum ſpatii contenta in finito quopiam intervallo continuo, habebitur illa, quam diximus (num.26.) virtualem extenſionem appellari. Hæc virtualis extenſio puncti materiæ quieti, replicatio regreſſui ejuſdem puncti materiæ ad idem ſpatii punctum reſpondet. Quod ſi plura conſiderentur materiæ puncta, tres alii caſus habebuntur; ſi nimirum conjungant idem momentum temporis cum diverſis punctis ſpatii, in quo ſita eſt disjunctorum coexiſtentia: ſi conjungant idem punctum ſpatii cum diverſis momentis temporis, quod fieret in ſucceſsivo appulſu punctorum materiæ ad eundem locum: ſi conjungant idem punctum ſpatii cum eodem momento temporis, in quo ſita eſt compenetratio. Hi ſeptem caſus exhibent omnes combinationes fluentes ex conjunctione temporis, & ſpatii, quorum omnes per Divinam Omnipotentiam poſsibiles eſſe, unicam autem disjunctorum coexiſtentiam illam naturaliter eſſe poſsibilem oſtendemus inferius, ubi ipſam noſtram theoriam ex lege Continuitatis deduxerimus.

36. Ut ſingulis momentis temporis pro puncto mobili quovis reſpondent ſingula lineæ puncta, ita ſingulis partibus temporis continui reſpondent ſingulæ partes lineæ, & viceverſa, qui motus dicitur æquabilis, vel uniformis, ſi æqualibus temporis partibus, æquales ſpatii partes reſpondeant, inæqualis, & difformis, ſi inæquales. Celeritas autem in actu ſecundo eſt illa relatio ſpatii ad tempus in motu æquabili, quæ reſultat conſiderando ſpatium directe, & tempus reciproce; ut nimirum eo ſit major ea celeritas, quo majus ſpatium eidem reſpondet tempori, vel minus tempus eidem ſpatio, adeoque ejus menſura eſt ſpatium diviſum per tempus, quæ menſura non niſi in motu æquabili, in quo celeritas perpetuo durat eadem, habetur accurate, ut etiam in eo ſolo motu accurata habetur idea celeritatis in actu ſecundo. Celeritas autem in actu primo eſt determinatio ad hanc ipſam celeritatem in actu ſecundo, ſive ad percurrendum certum ſpatium certo ſequenti continuo tempore, niſi quid obſit. Ea ſola convenit ſingulis momentis temporis, non velocitas in actu ſecundo, cum nullus momento competat motus, qui tempus continuum ſecum trahit. Quare ipſam intelligere debent Mechanici, ubi celeritatem ſingulis momentis debitam ducunt in tempus ad habendam ſpatii menſuram in motu etiam difformi.

37. Si linea componeretur e punctis, tempus vero continuum e momentis, quorum alia aliis immediate ſuccederent, omnes motus continui deberent eſſe æque veloces; ſingulis nimirum momentis, ſingula reſponderent puncta. Velocitas diverſa haberi non poſſet, niſi ſi vel idem ſpatii punctum conjungeretur ab altero mobili puncto cum

pluri-

pluribus momentis, quod affirmarunt ii, qui diſcrimen velocitatum per morulas explicabant, vel idem momenti punctum conjungeretur cum pluribus punctis ſpatii, quod affirmarunt nonnulli ex iis, qui virtualem illam punctorum extenſionem propugnabant. At ſemel intellecta Continuitatis natura, nulla eſt difficultas in concipienda celeritatum differentia, & quæ in contrarium afferuntur mera ſophiſmata ſunt, quæ facile diſſolvuntur, ſi conſideretur cuivis tempuſculo utcumque parvo reſpondere ſuum ſpatiolum, cuivis contra ſpatiolo ſuum tempuſculum in quovis motu, nec ullum eſſe tempuſculum, aut ſpatiolum omnium minimum, nullum ſecundum, & penultimum momentum, aut punctum.

38. Nimirum in motu continuo magis celeri eidem tempori reſpondet majus ſpatium, vel eidem ſpatio minus tempus. Si conſideretur ſemper in utroque mobili idem tempus, & id tempus dividatur in particulas quotcumque, utcumque exiguas; primum vero mobile moveatur decuplo celerius, quam ſecundum, cuicumque particulæ utcumque parvæ temporis continui habebitur in primo ſpatium decuplo majus, quam in ſecundo. Si ſpatium ſemper commune conſideretur, & id ipſum dividatur in particulas quotcumque utcumque exiguas, cuicumque particulæ utcumque parvæ ſpatii continui habebitur in primo tempus decuplo minus, quam in ſecundo. In eo nihil abſurdi continetur. Utcumque parvum ſit ſpatiolum, quod determinato tempuſculo percurrit ſecundum mobile, ſemper habentur ſpatiola illo minora, & minora in infinitum, & unum ex iis, nimirum quod decuplo eſt minus, percurritur a primo mobili eodem illo tempuſculo. Utcumque parvum ſit tempuſculum, quo primum mobile percurrit determinatum ſpatiolum, ſemper habentur tempuſcula illo minora, ac minora in infinitum, & unum ex iis, nimirum quod decuplo eſt minus, percurritur a primo mobili. Cum nullum ſit ſpatiolum, quo minus non habeatur, adeoque quod totum ſit primum, nullum ſit tempuſculum, quo minus non adſit aliud, adeoque quod totum ſit primum, nullo exiſtente ſecundo intervalli puncto, nullo ſecundo momento temporis, difficultas omnis penitus evaneſcit. Utrumque mobile habet initium motus in quodam determinato puncto ſpatii, & momento temporis, ut & finem, in quibus momentis non habetur pars motus, quantitatis nimirum continuæ, ſed indiviſibilis limes. Motus requirit & ſpatium, & tempus continuum, quæ diviſibilia ſunt in infinitum, & motus ipſius diviſibilitatem inducunt in infinitum. Numerus partium & ſpatii, & temporis, & motus pendet a ſingularum partium magnitudine, quæ ſi non determinetur, etiam ille numerus indeterminatus manet, ut & relatio partium ad partes. Diviſionis lege conſtituta, relatio ſtatim conſequi-

ſequitur inter partes. Eidem autem parti temporis continui major, vel minor utcumque in infinitum reſpondere poteſt pars continui ſpatii; unde conſequitur & celeritatem augeri in infinitum poſſe, vel minui, abſque ulla aut morula, aut extenſione virtuali, nimirum abſque conjunctione ejuſdem momenti temporis cum pluribus punctis ſpatii, vel ejuſdem puncti ſpatii cum pluribus momentis temporis.

39. Porro licebit hæc omnia ipſis quodammodo intueri oculis, ope Geometriæ in continua linearum relatione. Per quodvis punctum D in fig.3. rectæ AB ducatur recta indefinita MN in quovis dato angulo; in qua capiantur ad eamdem partem bina ſegmenta DE, DF in quavis data ratione, ut pro ſuperiore caſu ſubdecupla, ducanturque ex quovis itidem puncto dato C ipſius AB binæ rectæ CG, CH per puncta F, E.

40. Referat jam DC tempus quoddam, DF ſpatium a primo mobili percurſum, DE ſpatium percurſum a ſecundo. Utcumque imminuto tempore CD, ratio inter ſpatia eodem illo tempore deſcripta erit illa eadem DF ad DE, ſive ut 10 ad 1, nec ullum erit tempuſculum CD ita exiguum, ullum momentum D ita proximum momento C, ut pro utroque mobili, jam aliqua ſpatia continua non habeantur, quæ ſint in illa eadem ratione. Quod ſi quæratur, quo tempore primum mobile velocius percurret ſpatium æquale ſpatio DE percurſo a ſecundo mobili tempore CD, ſatis erit ducere rectam ex E parallelam AB, donec occurrat rectæ CG in L, tum rectam LQ parallelam MN, occurrentem CA, CH in Q, K, & C, Q erit tempus illud quæſitum, quo primum mobile habebit motum QL æqualem motui ED. Illo vero minori tempore ipſum ſecundum mobile adhuc minorem motum habebit, nimirum QK. Nulla eſt FD ita parva, ut ei aliqua ED decuplo minor non reſpondeat, nulla CD ita parva, ut ei aliqua CQ non reſpondeat, quæ erit itidem decuplo minor, quam ipſa, cum ſit CQ ad CD, ut QL, vel DE ad DF, ſive ut 1 ad 10. Ratio conſtans ſpatiorum DE, DF rationem exhibet conſtantem motuum eidem tempori debitorum, ratio itidem conſtans CQ, CD exhibet rationem conſtantem temporum eidem ſpatio debitorum. Quovis ſpatio utcumque parvo deſcripto a primo mobili reſpondet ſpatiolum decuplo minus deſcriptum a ſecundo: cuivis tempuſculo utcumque parvo impenſo a primo mobili reſpondet aliud tempuſculum decuplo minus impenſum a ſecundo mobili. Ubicumque fuerit punctum D, modo non congruat cum C, reſpondebunt ipſi binæ DE, DF, quarum prior erit decuplo minor poſteriore, ac inter ipſum, & C, erit punctum Q decuplo minus diſtans ab ipſo C, per quod altera $M^I N^I$ tranſeat, in qua itidem habeantur ſua ſegmenta QK, QL in ratione ſubdecupla.

41. Ac

Digitized by Google

41. Ac ope figuræ ejuſdem facile etiam diſſolvitur præcipua difficultas, quam contra motum continuum Veteres objiciebant, petita a motu Achillis, & teſtudinis, quorum prior ſit decies poſteriore velocior, quod argumentum, progreſſionum geometricarum ſummis inventis, Noſter Gregorius a S. Vincentio feliciſſime expedivit. Exponemus primo quidem utut notiſſimam difficultatem, tum eam e ſola continuæ quantitatis natura diſſolvemus, ac demum Geometria in ſubſidium vocata, oculis ipſis eamdem ſubjiciemus ſolutionem, quæ omnia quamvis, quod ad ſummam rei pertinet, notiſſima, adhuc tamen hic prætermittenda non duximus, ut haberetur quidquid ad Continuitatis naturam intelligendam, & amovendam impoſſibilitatis ſuſpicionem requiritur.

42. Sic igitur ratiocinantur. Diſtet initio motus per unum milliare Achilles a teſtudine. Dum is conficit illud milliare, teſtudo conficiet paſſus 100; dum is 100 illos paſſus, teſtudo alios 10; dum is eos decem, teſtudo conficiet unum, dum is unum, teſtudo decimam paſſus partem, & ita porro in infinitum. Nunquam igitur, & nuſquam Achilles aſſequi teſtudinem poterit, quod ex alia parte eſt abſurdum. Nam ſi Achilles quodam dato tempore unum milliare percurrat, teſtudine percurrente eodem tempore decimam milliaris partem, accedet ad ipſam per novem decimas milliaris partes; adeoque cum æqualibus temporibus debeat ad ipſam æqualiter accedere ob utriuſque motum æquabilem, ſi fiet ut 9 ad 1, ita illud tempus ad aliud, habebitur tempus illud, quo debet evaneſcere omnis illorum diſtantia, eritque, ut 9 ad 1, ita illud milliare illo tempore percurſum ab Achille, ad ſpatium, quod ab Achille præterea percurrendum erit ad aſſequendam teſtudinem. Falſum igitur eſt *nunquam*, & *nuſquam* ipſos coire poſſe, cum adjecta illi tempori, & illi milliari nona ſui parte, deveniatur ad illud momentum, & punctum, in quo concurſus haberi debet. Porro hujus difficultatis apparens vis tota ſita eſt in ambigua ſignificatione illius *nuſquam*, vel *nunquam*.

43. Nam in primis ex illa intervalli finiti diviſibilitate in infinitum evidenter eruitur, poſſe ſeriem quamdam quantitatum minorum, ac minorum continuari in infinitum, quin certam quamdam, & finitam quantitatem omnis ea quantitatum ſumma tranſcendat. Quoniam enim digitus quipiam dividi poteſt bifariam, tum ejus dimidia pars bifariam, & ita porro in infinitum; patet poſſe aſſumi dimidium digiti, tum dimidium reſidui dimidii, ac iterum dimidium alterius reſidui, & ita porro in infinitum, quibus tamen omnibus aſſumptis, nunquam ille digitus tranſcurretur, cujus particula ſemper remanere ponitur, dimidio tantum rurſum aſſumpto.

44. In-

44. Inde autem manifeſto conſequitur, poſſe totam illam ſeriem paſſuum 1000, 100, 10, 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ &c., & ipſi reſpondentem ſeriem temporum ab Achille, & teſtudine impenſam in infinitum continuari, quin tamen omnis earum quantitatum ſumma finitum quoddam ſpatium, & tempus tranſcurrat. Tum vero ſi illud *nunquam*, & *nuſquam* ſignificet momentum, vel punctum quodvis intra eam finitam ſpatii, vel temporis menſuram contentum, veriſſimum erit *nunquam*, & *nuſquam* Achillem ad teſtudinem devenire. At ſi indeterminate ſignificet momentum quodvis, vel punctum utcumque aſſumptum in toto tempore, vel ſpatio, quod quidem in uſu communi omnino ſignificat, falſiſſima erit propoſitio. Aſſequetur enim Achilles teſtitudinem in ultimo momento, & puncto illius ſpatii, & temporis, quo ita illa ſeries in infinitum continuata concluditur, ut ab eo præciſe exhauriatur.

45. Nec difficile eſt ejuſmodi finitam temporis, vel ſpatii menſuram definire. Cum enim quivis præcedens terminus ad conſequentem eandem habeat rationem, eandem habebit & omnium præcedentium ſumma ad ſummam omnium ſequentium, adeoque differentia primi a ſecundo erit ad primum, ut differentia ſummæ omnium præcedentium ab omnium conſequentium ſumma erit ad ſummam præcedentium omnium, ſive ad totam ſeriem. Porro ſumma omnium præcedentium continet omnes ſeriei terminos, cum in quovis finito terminorum numero in præcedentibus deſit poſtremus terminus tantummodo, qui ſerie in infinitum continuata in infinitum minuitur, ac, ea tota ſimul conſiderata, evaneſcit; ſumma autem omnium conſequentium continet omnes præter primum, adeoque differentia prioris ſummæ a ſecunda eſt ſolus primus terminus. Habetur igitur notiſſimum illud theorema *eſt differentia primi termini a ſecundo ad primum, ut primus ad illam finitam menſuram, qua tota ſeries continetur ita, ut eam exhauriat*. In caſu noſtro erit ut 9 ad 1, ita unum milliare, vel tempus ab Achille impenſum in percurrendo uno milliari ad illam ſpatii, vel temporis menſuram, in cujus poſtremo puncto, vel momento coibit cum teſtudine Achilles, nimirum ubi effluxerit id tempus, quo Achilles unum milliare conficit, & præterea ejus temporis pars nona, Achilles ipſe abſolvet milliare 1, & nonam milliaris partem, teſtudo nonam partem milliaris tantummodo, cujus illud unum milliare cum parte nona eſt decuplum, adeoque ſimul convenient, quæ eſt illa eadem ſuperior determinatio facta in argumento contrario num.42.

46. Quod ſi ſolutionem eandem libeat oculis ipſis ſubjicere, ſatis eſt in fig. 3. ducere itidem ex K rectam KO parallelam AB, donec occur-

occurrat rectæ CG in O, tum per O rectam M''N'' ipſi MN parallelam, ac iterum ex P ducta recta ipſi AB parallela concipere eandem conſtructionem continuatam in infinitum: ducta vero per C recta *mn* itidem parallela rectæ MN, aſſumere ejus ſegmenta C*f*, C*l*, C*o* &c. C*e*, C*k*, C*p* &c. æqualia ſegmentis DF, QL, RO &c. DE, QK, RP &c. ubi patet puncta *l*, *o* &c. debere congruere cum punctis *e*, *k* &c.

47. Si jam recta AB exprimat tempus, cujus punctum D ſit momentum temporis, quo motus incipit, ac ſit FE unius milliaris, & ratio FD ad ED eadem ac prius 10 ad 1, concipiaturque recta MN motu continuo delata verſus C ita, ut interea per eam excurrant bina mobilia, quorum alterum ſit ſemper in ejus interſectione cum recta CG, alterum in ejus interſectione cum CH, ea bina mobilia referent ipſos illos motus Achillis, atque teſtudinis. Nam primo quidem patet, tempore DC primum illud mobile debere percurrere in recta MN totum ſpatium FD, ſive *f*C in recta *mn*, & ſecundum mobile ſpatium ED in illa, *e*C in hac, adeoque fore ipſorum velocitates, ut 10 ad 1, diſtantiam vero initio motus fore FE, ſive *fe* unius milliaris, quemadmodum in Achille, & teſtudine ſupponitur. Deinde patet, ea mobilia concurrere momento C delata recta MN ad *mn*, elapſo tempore quodam finito DC, & emenſo a primo mobili ſpatio finito FD vel *f*C, a ſecundo ED, vel *ed*.

48. Deinde ut illud ipſum tempus, atque illa ſpatia definiantur, & oculis ipſis ſubjiciatur tota ſeries terminorum in ratione ſubdecupla decreſcentium in infinitum, erit in primis CD ad CQ, ut DF ad QL, ſive ad DE, nimirum ut 10 ad 1. Quare & antecedentium differentia DQ erit ad ſecundum antecedens CQ, ut conſequentium differentia EF, ad ſecundum conſequens ED, nimirum ut 9 ad 1. Eſt igitur ſpatium ED a teſtudine percurſum, & percurſum ab Achille ultra ſuum primum milliare pars nona ipſius primi milliaris, & totum tempus CQ ab utroque impenſum poſt illud, quo Achilles unum milliare confecit pars nona illius ipſius, quo confectum eſt milliare ipſum. Quodſi conſiderentur præterea binæ ſeries linearum DQ, RQ &c, & FE, LK, OP &c., vel *fe*, *lk*, *op* &c., invenietur, eas eſſe continuo in ratione FD ad DE, adeoque in caſu præſenti decreſcere in ratione ſubdecupla. Nam eſt CD ad CQ, ut DF ad QL, ſive DE, nimirum (per notiſſimum Geometriæ lemma, quo rectæ FD, LQ parallelæ a recta CH tranſeunte per concurſum rectarum FL, DQ ſecantur in eadem ratione in E, K) ut LQ ad KQ, ſive RO, adeoque ut CQ ad CR. Quamobrem ſunt in ratione continua 10 ad 1, tam rectæ CD, CQ, CR &c., quam DF, QL, RO &c., quæ iis proportionales ſunt, & proinde in eadem ratione continua erunt tam illarum differentiæ DQ, QR &c., quam harum differentiæ FE, LK, OP &c.

49. Por-

49. Porro patet, illam conſtructionem continuari poſſe in infinitum citra punctum C, nec unquam, aut uſquam ipſum punctum C prateriri, adeoque totam illam tempuſculorum, & ſpatiolorum ſeriem in infinitum continuatam, tempus finitum DC, & finitum ſpatium FD nequaquam prætergredi. Facile autem illud etiam demonſtratur, ipſa tempora, & ſpatia CD, FD ab illis ſeriebus exhauriri, ſi ipſæ ſimul totæ concipiantur, cum facile demonſtretur ex ipſa progreſſionum decreſcentium natura, & demonſtrari ſoleat in Elementis, earum terminos ita in infinitum imminui, ut infra quamcumque magnitudinem, utcumque ad libitum determinatam deſcendant. Quamobrem ſi concipiatur quævis utcumque parva particula temporis CD, vel ſpatii C*f*, infra eam aliquando deſcendent termini progreſsionum CD, CQ, CR &c., & C*f*, C*e*, C*k* &c.; ac proinde nulla erit utcumque exigua earum menſurarum pars, quam intactam relinquant progreſsiones illæ DQ, QR &c., & FE, LK, OP &c., vel *fe*, *ek*, *kp* &c., quæ idcirco ipſas, ſi totæ ſimul conſiderentur, exhauriunt.

50. En igitur rei totius ſummam. Quo tempore Achilles eſt in F, vel *f*, teſtudo eſt in E, vel *e*. Tempore continuo DE Achilles percurrit milliare FE, ſive *fe*, teſtudo decimam milliaris partem LK, ſive *ek*. Momento ejus temporis ultimo Achilles eſt in L, vel *l*, ſive *e*, teſtudo in K, vel *k*. Secundo tempore, quod eſt ſubdecuplum primi, Achilles percurrit ſpatium LK, ſive *lk*, vel *ek*, teſtudo ſpatium OP, vel *op*, ſive *kp*. In ultimo momento ejus tempuſculi Achilles eſt in O, vel *o*, ſive *k*, teſtudo in P, vel *p*; & ita porro per ſeriem tempuſculorum decreſcentium in ratione ſubdecupla ſemper in ultimo momento cujuſvis ex iis tempuſculis Achilles eſt in eo puncto ſpatii, in quo puncto ſpatii teſtudo erat in primo momento ejuſdem tempuſculi, ac tempuſculo proxime ſequenti percurrit Achilles illud ſpatiolum, quod teſtudo percurrit tempuſculo proxime præcedenti. Utraque ſeries ſpatiolorum, & tempuſculorum continuari poteſt in infinitum, & ſemper ſpatiolo Achillis deſcripto quodam tempuſculo reſpondebit ſpatiolum teſtudinis eodem tempuſculo deſcriptum, & ſpatioli Achillis ſubdecuplum, quod ſecum trahet novum quoddam tempuſculum pro Achille poſterius priore, & ejus ſubdecuplum.

51. Terminorum hoc modo conſideratorum nullus erit finis, ſi nomine finis concipiatur ultimus terminus conſiderationis factæ eo ordine; erit autem finis, ſi nomine finis intelligatur tempus, vel ſpatium, quod tota ſeries ſimul conſiderata exhaurit quidem, ſed non prætergreditur. Nam tota tempuſculorum ejuſmodi ſeries continebitur tempore finito CD, quod ſi tota ſimul conſideretur, exhauriet, tota ſpatiolorum ſeries continebitur ſpatio finito DF, vel C*f*, quod, ſi tota ſimul conſideretur, exhauriet. Achilles in nullo momento aſſum-

ſumpto intra tempus finitum CD, in nullo puncto aſſumpto intra ſpatium finitum FD, vel *f*C aſſequetur teſtudinem: at cum ea conveniet in momento, & puncto C, adeoque verum erit, eos nunquam, & nuſquam convenire, ſi illud *nunqam*, & *nuſquam* accipiatur pro momentis, & punctis omnibus aſſumptis intra finitum quoddam tempus CD, & finitum ſpatium DF, C*f*, non vero ſi indefinite accipiatur pro puncto, vel momento quovis utcumque aſſumpto, ut includat ipſum etiam illud momentum, vel punctum C.

52. Atque hoc pacto rite cognita continuitatis natura, omnis illa tanta apparens difficultas evaneſcit. Habeatur ſemper præ oculis illud, cuivis *momento temporis* reſpondere, *eſſe in aliquo puncto* ſpatii, cuivis *tempori continuo*, *percurrere aliquod ſpatium continuum*, nimirum lineam, nullum autem eſſe momentum, aut punctum, quod immediate conſequatur alied momentum, aut punctum, ſed inter bina quævis momenta, aut puncta intercedere ſemper tempus aliquod continuum, aut lineam continuam, in quibus habeantur momenta, & puncta quot libuerit minus remota ab utrolibet ex extremis, quam ipſa inter ſe remota ſint: nullum eſſe proinde tempuſculum, aut ſpatiolum adeo exiguum, ut alia ipſo minora non habeantur, adeoque nullum tempuſculum, aut ſpatiolum eſſe ita primum, ut in eo ipſo partes non adſint, quarum aliæ priores ſint aliis. His rite conſideratis, & habitis ſemper ob oculos, omnes, quæ circa continuitatem habentur, difficultates evaneſcent, & hæc ipſa erit inferius præcipua clavis, qua difficultatem contra legem continuitatis a Maupertuiſio propoſitam contra Bernoullium aperiemus, diſſolvemuſque.

53. Interea ad ipſam continuitatis naturam melius perſpiciendam, & ad ea, quæ de lege continuitatis dicturi ſumus, proderit plurimum conſiderare aliquanto diligentius ductum unius generis quantitatis continuæ, nimirum lineæ, quæ conſideratio univerſam ſecum ſublimiorem Geometriam trahit; ſed utiliora quædam percurremus per ſumma capita. In primis in Geometria ſunt infinita linearum continuarum genera, quæ etiam locos geometricos appellant, quæ ſingula ſuam in ſe admodum ſimplicem, licet plerumque nobis compoſitam plurimum, & implexam, naturam habent, & naturam illam, ac proprietates generales quaſdam ex ea fluentes ita habent ubique communes, ut nullus ne exiguus quidem ſit arcus, qui illis proprietatibus non gaudeat.

54. Jam vero in quavis ex iis lineis continuis habetur ſemper ejuſmodi continuatio ejuſdem ductus, ut nuſquam arcus abrumpatur, nuſquam deſinat, & in quodam puncto ſiſtat. Id inductione ampliſſima curvarum omnium, quarum naturam Geometræ norunt, abunde patet; verum ex ipſa continuitatis natura neceſſario fluit, & generaliter

raliter facile deducitur. Punctum enim quodcumque debet eſſe terminus inter binas partes lineæ, ſe immediate excipientes, ut in tempore momentum quodlibet eſt terminus inter tempus præcedens, ac ſubſequens. Linea ſpatii in eo differt a linea reali materiæ (ſi linea ipſa realis materiæ continua eſt ulla, quæ in theoria noſtra nulla omnino eſt) quod in linea reali punctum quidem intermedium quodcumque eſt communis limes inter lineæ partem, & aliam partem, at punctum primum, & ultimum eſt terminus lineæ realis ex una parte, & vacui ſpatii, vel nihili ex altera; verum in linea ſpatii nuſquam habetur punctum, in quo linea ipſa interrumpatur, & quod ante ſe lineam non habeat, & lineam itidem poſt ſe. Id nimirum ipſa puncti Geometrici natura expoſcit, ut binas ſemper contiguas lineas connectat inter ſe, & conjungat, vel disjungat, & ſeparet, utrumque enim officium ſimul præſtat, prorſus ut in tempore momentum quodvis & ante ſe tempus habet aliquod, & poſt ſe, ac ſemper præteritum aliquod a futuro immediate conſequenti dirimit, ac disjungit.

55. Inde autem facile intelligitur, cur quævis linea continua vel in orbem circumvoluta redeat in ſe ipſam, vel crure quodam infinito recedat ultra quoſcumque limites in infinitum nuſquam ita abrupta, ut ulterius non pergat. Quinimmo & illud neceſſario accidit, ut ſi ejus aliquod crus abeat in infinitum ex parte aliqua, ſemper & aliud aliquod ex parte eadem, vel altera itidem ſine ullo ſine abeat in infinitum, ne & ipſum alicubi abrumpatur. Mira autem omnino eſt indoles tam linearum redeuntium in orbem, quam abeuntium crure quopiam in infinitum, & immenſus ſane hic ſeſe aperit campus, per quem liceret excurrere, atque evagari, non diſſertatiuncula tam arctis conſtricta limitibus, ſed immani vaſtorum mole voluminum nunquam ſatis peragrandus. Sed cohibendus omnino eſt impetus, & primi tantummodo fines prælerlegendi.

56. In primis omnes lineæ redeuntes in orbem, nuſquam initium habent, nuſquam finem, ſed infinito quarundam veluti ſpirarum numero redeunt in ſe ipſas. Id in circulo, qui unus earum omnium noſtræ humanæ menti ſimpliciſſimus eſt, ac maximè perſpicuus, Geometris eſt notiſſimum, & ea eſt unica ratio, cur arcus circularis triſectio obtineri per Euclideam Geometriam omnino non poſſit. Ut enim in noſtris etiam Sectionum Conicarum elementis nuperrimis expoſuimus elementorum noſtrorum tomo tertio a num.278. ſi proponatur ſecandus in tres partes æquales arcus quidam circuli AB, in fig. 4. prima fronte videtur propoſitus arcus unus triſecandus, ſunt autem numero infiniti. Cum nimirum circulus infinitis veluti ſpiris in ſe ipſum redeat, ac circumflectatur, punctum illud A, vel B commune eſt infinito ſpirarum numero, & arcus numero infiniti incipiunt ab A, & de-

deſinunt in B, atque ii utravis directione tam AEB, quam AFB, qui omnes eadem prorſus natura gaudent, ut nimirum omnia eorum puncta eandem a centro diſtantiam habeant, ac easdem proprietates generales habent, ex: gr: ut æquales eorum partes æqualibus chordis æqualiter ad ſe invicem inclinatis ſubtendantur. Sunt autem ii arcus cum priore directione AEB, AEBFAEB, AEBFAEBFAEB, & ita porro; poſteriore autem AFB, AFBEAFB, AFBEAFBEAFB; & ita porro. Sit primus arcus AEB graduum 60, erit AFB graduum 300: inter A, & B continebuntur arcus omnes, qui exprimuntur numero graduum compoſito ex 60, vel 300 & continua additione numeri 360; arcus nimirum 60, 420, 780, 1140 &c., & 300, 660, 1020, 1380 &c.

57. Iam vero ob naturam, & proprietates omnibus communes fieri omnino non poteſt, ut adhibito loco Geometrico quocumque, ſive quavis Geometrica conſtructione eruta ex ſola natura, & proprietatibus arcus incipientis in A, ac deſinentis in B, inveniatur pars tertia unius ex iis arcubus, quin eâdem conſtructione inveniatur ſimul pars tertia reliquorum omnium, quos diximus eſſe numero infinitos. Hinc problema illud, quod unicam videbatur ſolutionem habere jam videtur requirere numero infinitas. Sed commode accidit illud, ut omnes illæ infinitæ numero ſolutiones reducantur ad tres tantummodo, ſive ad inventionem trium punctorum tantummodo. Si enim AD gr.20 ſit pars tertia arcus AEB gr:60, addita DD' gr.120 parte tertia totius peripheriæ gr: 360, erit AD' gr: 140 pars tertia arcus AEBFAEB gr:420 compoſiti ex AEB, & una peripheria: addito vero iterum arcu D'D'' gr:120 parte tertia totius peripheriæ, habebitur arcus ADB DFD'' gr: 260 pars tertia arcus AEBFAEBFAEB gr: 780 compoſiti ex AEB, & binis peripheriis; cumque ſit etiam D''D pars circuli tertia, erit arcus AEBFAD compoſitus ex arcu AD, & una circumferentia pars tertia arcus incipientis in A, & deſinentis in B poſt tres circuitus integros, ac pariter arcus AEBFAEBD' erit pars tertia arcus incipientis in A, & deſinentis in B poſt quatuor circuitus; atque ita porro in infinitum, cum additis toti arcui triſecando novis integris peripheriis, accedant tertiæ parti novi trientes peripheriæ ipſius, patet, omnes arcus incipientes in A, & poſt quemvis numerum integrorum gyrorum deſinentes in B ordine AEB triſecari in aliquo ex iis tribus punctis D, D', D''; ut etiam e contrario cum AD ſit triens arcus AED, & DD'' totius peripheriæ, erit AD'' triens arcus AFB, & eodem prorſus argumento AFD' triens arcus addentis ipſi AFB integrum circuitum arcus compoſiti ex AFB, AFBED & binis peripheriis, atque ita porro arcus itidem omnes exeuntes ex A, & per F deſinentes in B poſt quemcumque ſpirarum numerum ſi triſecari

D de-

debeant, ſemper trientis abſciſſio habebitur in uno ex illis iiſdem punctis D'', D', D. Quamobrem omnes illæ infinitæ numero ſolutiones reducuntur ad inventionem horum trium punctorum tantummodo.

58. Porro ad id requiritur locus geometricus, qui eundem illum circulum ſecet in illis ipſis tribus punctis, vel bina geometrica loca, quæ ſe invicem ſecare poſſint in punctis tribus: quod cum binæ rectæ lineæ inter ſe, vel recta cum circulo præſtare non poſſint (illarum enim interſectio unica eſſe poteſt, harum duplex tantummodo) poſſint autem binæ Conicæ Sectiones, vel Conica Sectio, aut etiam quævis ſublimior curva cum circulo, arcus circularis triſectio nunquam obtineri generaliter poterit per Euclideam Geometriam, quæ ſolas adhibet rectas lineas, & circulum, poterit autem per Conicas Sectiones, vel etiam ſublimiores curvas quaſcunque, & ſi per analyſim algebraicam tentetur ſolutio, ſemper neceſſario obveniet æquatio gradus tertii habens tres radices omnes reales, quæ exhibeant omnia illa tria puncta radicibus ſuis ipſis: quod ſi, ſatis conſiderata continuitatis natura, & circuli nuſquam incipientis, nuſquam deſinentis infinita circumvolutione in ſe ipſum, habitum eſſet ab oculos, non ita diu tam multi incaſſum in ejus problematis ſolutione quærenda inſudaſſent methodis ad eam aſſequendam ineptis.

59. Et quidem, quod de circulo diximus, in omnibus curvis, quæ in ſe ipſas utcumque redeunt in orbem, locum habet ubique, quarum curvarum infinita numero genera ſunt, quæ omnia perſequi omnino non licet. Infinita itidem ſunt linearum genera, quæ cruribus quibuſpiam in infinitum recedunt ſine ullo limite. Omnium noſtræ quidem humanæ menti ſimpliciſſima eſt linea recta, quæ cum utrinque natura ſua protendatur in infinitum, nuſquam enim ita deſinit, ut continuari non poſſit, habet bina quædam veluti crura infinita. Bina itidem crura habet Parabola; at Hyperbola habet quatuor, ut Geometris notiſſimum eſt, in quibus contemplandis, ut natura continuitis innoteſcat immorabimur nonnihil: multo autem plura, quæ huc ſpectant pertractavimus in fuſiore Diſſertatione adjecta memoratis Sectionum Conicarum elementis noſtris, ubi de locorum Geometricorum transformatione agentes, multa, quæ ad continuitatis Geometricæ naturam pertinent, perſecuti ſumus diligentiſſimè.

60. In primis ſit in fig: 5 recta quædam AB, quæ concipiatur utrinque producta quantum produci poteſt. Deſumpto intra ipſam quovis puncto H, & extra puncto C, per hoc tranſeat recta quædam GF pariter producta quantum produci poteſt, quæ ſi non congruat cum recta DCE illi parallela, eam ſecabit alicubi in P. Concipiamus jam rectam illam GF primo quidem congruere cum CH, tum perpetuo converti circa C verſus A. Punctum P erit primo quidem in H, tum excur-

excurret motu continuo per totam rectam HA ita, ut nullum ſit ejus punctum utcumque remotum ab H, ad quod non appellat antequam congruat cum recta ED parallela ipſi BA. Momento temporis, quo cum ea congruet recta GF, illa interſectio P nuſquam jam erit, ſed in quodam Infiniti veluti pelago, atque barathro demerſa, & obruta deliteſcet. At quovis e ſequentibus momentis, abeunte GF in G'F', jam illa interſectio P' regredietur ex infinito ex parte B ita, ut nullum ſit ejus infiniti cruris HB punctum, per quod non tranſeat, quo crure toto peragrato iterum deveniet ad H. Videre eſt ibi mirum quendam rectæ infinitæ nexum in ſe redeuntis quodammodo per infinitum ita, ut bina ejus crura HB, HA in illa infinita diſtantia oppoſita copulentur quodammodo, & conjungantur, ut nimirum Infinitum ipſum ſit quoddam veluti punctum commune bina illa crura connectens ex parte HB, HA, quemadmodum punctum H connectit eadem, & eſt communis eorum terminus ex parte BH, AH. Si enim concipiatur motus continuus interſectionis P conjunctus cum motu continuo rectæ GF, poſito ∞ pro characteriſtica Infiniti, apparebit ipſum fieri per H A ∞ B H, atque id ita, ut quovis momento temporis ſit illa interſectio in aliquo puncto ejus infiniti veluti circuli, a cujus crure HA ad crus HB tranſeat per communem terminum ∞, & continuato lineæ gyrantis motu in ſingulis ejus converſionibus, integram circuitionem ejuſmodi bis abſolvat, recta vero ipſa utrinque in infinitum producta reducatur quodammodo ad quendam infinitum veluti circulum in ſe perpetuis, & infinitis orbibus redeuntem.

61. Hanc rectæ cum infinito quodam circulo æquipollentiam videre eſt etiam in fig.6, ubi ſi in ipſa AB aſſumatur punctum C per quod recta GF perpetuo gyret, ac occurrat ſemper alicubi in P rectæ QHR perpendiculari ad AB, centro autem P, radio PH concipiatur ſemper circulus HMIN, & conſiderentur omnes mutationes, quæ accident arcui MHN in eo continuo motu, facile apparebit, accedente recta GF ad poſitionem rectæ ECD parallelæ ipſi QR, punctum P recedere ab H, augeri circulum, ac arcum MHN accedere perpetuo ad rectam AHB, quam transgrediatur motu continuo, & abeat ad partes oppoſitas in M'HN', dum, ipſâ GF poſitionem ED tranſgreſsâ, punctum P, ſuperato infinito ∞, abeat jam ad partes Q. In eo tranſitu manifeſtum eſt, arcum illum per ipſam rectam tranſire in ipſo appulſu rectæ GF ad ED, & puncti P ad infinitum ∞; nam reliquis omnibus momentis temporis reſpondent ſemper alii ejus peripheriæ ſtatus hinc, vel inde ab ipſa recta AHB, qui ſtatus omne ſpatium illud utralibet ex parte poſitum ita in illo motu continuo perradunt, ac veluti everrunt, ut nullum ejuſdem ſpatii ſit punctum, ad quod in aliqua poſitione puncti P hinc, vel inde exiſtentis in rectis HQ, HR ar-

HR arcus ille circuli non appellat. Quare pro momento illo unico, in quo recta GF congruit cum ED, & punctum P cum Infinito ∞, relinquitur ille ſtatus unicus peripheriæ MHN congruentis cum recta infinita AHB, quem proinde ſtatum eo momento temporis habere debet arcus ipſe, quo circuli ipſius centrum P, & extremum diametri I nuſquam jam eſt, circulus ipſe evaſit infinitus, curvatura omnis evanuit, & recta peripheriæ infinitæ ſucceſſit.

62. Quod ſi recta CP concipiatur occurrere peripheriæ circuli in *c*, ut circuli HMINH arcus continui incipientes in H, & deſinentes in *c* ſunt bini arcus H*c*, & HMI*c*, directionibus oppoſitis, quin immo juxta num. 56. infiniti directione utraque, ita etiam in recta infinita H A∞ B H ſegmenta, quæ ſunt quidam veluti arcus incipientes in H, & deſinentes in C, ſunt bina utraque directione; nimirum HC, & H A ∞ B C, immo etiam infinita, hoc eſt, H C B ∞ A H C, H C B ∞ A H C B ∞ A H C &c. & H A∞ B C-H A∞ B C, H A∞ B C H A∞ B C H A∞ B C &c., quæ conſideratio mirum ſane quem uſum in eadem illa noſtra diſſertatione habeat in exponenda analogia quadam, quam ad ſe invicem habent Ellipſis, & Hyperbola, ubi ipſam analogiam turbare maxime viderentur.

63. Nec vero minus elegans ſimul, ac myſterioſa eſt arcuum tam Parabolicorum, quam Hyperbolicorum continuatio quædam, & nexus in illa infinita diſtantia. Sit DVE (fig.7.) axis, AVB tangens Parabolæ MVN, quæ concipiatur producta quantum licet. Demonſtratur in omnibus Sectionum Conicarum elementis, crura VM, VN & a ſe invicem, & ab axe, & a tangente in infinitum recedere. Nam per quodvis punctum Q tangentis, vel punctum axis R utcumque remotum ab V ducatur recta tangenti, vel axi perpendicularis, debet alicubi illa alteri, hæc utrique cruri hinc, & inde occurrere. Ducta autem quavis FG per V hinc, vel inde ab axe, qui neutri cruri occurrit iterum, demonſtratur, eam alteri cruri debere alicubi iterum occurrere in P, niſi ſit ipſa tangens, in qua puncta P, V coeunt. Concipiatur igitur recta GVP motu continuo circumvoluta, & defigatur acies in motum continuum puncti P. Ea digreſſa a poſitione tangentis BA, punctum P diſcedet ab V, & peragrabit totum crus VM, in quo ſemper erit alicubi, utcumque parum diſtet FG ab axe ED, nec ullum eſt punctum ipſius cruris VM utcumque ſemotum ab V, ad quod aliquando non appellat. Eo momento unico, quo ea recta cum axe congruet, punctum P infinito obrutum nuſquam erit, ſed abeunte FG in F'G' ad partem oppoſitam, illud ipſum punctum regredietur ex infinito per omnia puncta P' cruris infiniti NP'V, donec abeunte F'G' in BA, redeat ad V. Continuo motu illius rectæ circa V, continuus erit etiam motus puncti P per omnem Parabolam ita, ut in ſingulis inte-

Digitized by Google

integris converſionibus ejus rectæ bis eam percurrat totam ab altero crure ad alterum tranſiens in appulſu ejus rectæ ad tangentem momento temporis per V, ubi ea connecti patet communi termino V, ac in appulſu ipſius rectæ ad axem momento itidem temporis per Infinitum; ubi idcirco connectuntur quodammodo bina illa crura in illis oppoſitis infinitis diſtantiis ab axe, tanquam ſi plaga ſiniſtra, ut vidimus in recta linea, cum dextra connecteretur quodammodo; & punctum P per rectam RP in infinitum recedens ex parte oppoſita P ex infinito regrederetur, ac ipſa etiam Parabola in illa infinita diſtantia quodammodo veluti in ſe ipſam rediret communi termino copulata in infinito.

64. Et quidem in Parabola conica ex eadem axis parte VE, ex qua crus VM in infinitum receſſerat, crus NV ex infinito regreditur, & ſi conſiderentur generaliter eæ curvæ, quarum ordinata PR eſt in quavis ratione directa potentiæ cujuſvis integræ, vel fractæ abſciſſæ VR, quas curvas cum iis, in quibus ea eſt in quavis ratione reciproca ejuſdem abſciſſæ, diligenter perſecuti ſumus in eadem illa diſſertatione; determinata directione, & continuitate geometrica eorum arcuum, occurrent ſublimiores Parabolæ, in quibus crus VN regreditur ex parte oppoſita, vel ut in fig.8. in angulo AVD jacente ad latus tangentis, quo caſu in V habetur cuſpis, quam ibi appellavimus primi generis, & ut communiter etiam Geometræ appellant, punctum regreſſus, vel ut in fig.9 in angulo DVB ad verticem oppoſito, quo caſu habetur flexus contrarius in V, ad quos tres caſus omnem Parabolarum ſublimiorum reduci familiam ibidem demonſtravimus.

65. Ac Parabolæ quidem omnes, in quibus ordinata eſt in aliqua ratione directa abſciſſæ, bina tantummodo habent crura infinita: at Hyperbolæ, in quibus ratio ejuſmodi eſt reciproca, habent ſingulæ quatuor, quorum bini ſunt rami binorum crurum ſinguli, ac eorum alter reſpectu alterius videtur quidem prorſus disjunctus; & tamen bini illi rami in ſingulis ope quaternorum crurum ita inter ſe ſe connectuntur in infinita diſtantia, ut unicam quandam lineam continuam conſtituant in ipſo infinito plerumque ad partes oppoſitas conjunctam, ut punctum motu continuo poſſit per eas excurrere, poſt receſſum in infinitum in uno crure, regrediens ex infinito in altero, inter quæ crura, & Parabolica illa hoc intercedit diſcriminis, quod illa & ab axe, & a quavis alia recta perpetuo in infinitum recedant, horum ſingula rectam habeant quamdam, ad quam accedant ultra quoſcumque limites, quin cum ea coeant in puncto ullo utcumque remoto, quæ recta idcirco aſymptotus appellatur. Rem in communi Conica Hyperbola contemplari licebit.

66. Re-

Digitized by Google

66. Refert figura 10 binos Hyperbolæ ramos, MVN, M'V'N', conſtantes quatuor cruribus aſymptoticis, VM, VN, V'N, VM' infinitis, quorum aſymptoti ſint binæ rectæ infinitæ ACB, DCE. Si in altero ramo ſumatur punctum V ad arbitrium, & per ipſum tranſeat tangens QVR, tum recta alia quævis GVF, hæc ſemper ipſi Hyperbolæ occurret in unico alio puncto P, præter binas rectas F2 G2, & F5 G5 binis aſymptotis parallelas, quod in communibus Conicarum Sectionum Elementis demonſtrari ſolet, vel ex iis admodum facile deducitur. Quare ſi concipiamus rectam ipſam digreſſam a poſitione tangentis QR motu continuo converti circa V verſus F1 G1, & defigatur mentis acies in motum continuum puncti P, apparebit, punctum ipſum P1 percurrere totum crus infinitum VM, donec F5 G5 abiens in F2 G2 fiat parallela aſymptoto BA, quo temporis momento ipſum punctum P in Infinito deliteſcens nuſquam jam erit; & continuato motu per F3 G3, regredietur ex Infinito per P3, ac deſcribet totum crus M'V' rami oppoſiti, tum per crus V'N' in P4 motu continuo rectæ F4 G4 recedet in infinitum ad partes N', donec ea recta in F5 G5 evadat parallela aſymptoto DE, quo momento temporis iterum deliteſcet ipſum illud punctum P in Infinito: at quovis momento ſequentis temporis tranſlata recta in F6 G6 redibit ex infinito in P6 per infinitum crus NV, ac recidente recta ipſa cum tangente QR poſt abſolutam dimidiam converſionem, regredietur ad V, unde fuerat digreſſum, integra Hyperbola percurſa.

67. Patet ex hoc motu continuo utrumque Hyperbolæ ramum conſtituere unicam curvam geometricam continuam VMM'V'N'NV bis in Infinitum recedentem, bis quodammodo ex parte oppoſita ex Infinito reducem, cruribus illis infinitis in Infinito ipſo, licet ad partes oppoſitas communi quodam termino bis connexis, quemadmodum in diſtantia finita in communi unico puncto conjunguntur in V, & V'. Atque hic quidem contemplari etiam licet elegantiſſimam analogiam Hyperbolæ cum Parabola, & Ellipſi, quam in toties memorata diſſertatione tertio noſtrorum elementorum tomo adjecta paullo aliter perſecuti ſumus. Sit in fig. 11 Ellipſis OVO'V', in qua puncta V V' ſint bini vertices axis tranſverſi, vel diametri cujuſpiam ipſi proximæ OO' axis conjugati, vel conjugatæ diametri, ac QVR ſit tangens ipſius Ellipſeos, FVG ſit recta quævis alia ita, ut F2 G2, & F5 G5 tranſeant illa per O, hæc per O', & quatuor reliquæ, ſecent ſingulæ ſingulos e quatuor arcubus VO, OV', V'O', O'V, in P1, P3, P4, P6. Si jam illa recta FVG digreſſa a poſitione tangentis QVR convertatur circa V motu continuo, ponantur autem hinc & inde ab O binæ litteræ M M', & ab O' binæ N, N', punctum P motu itidem continuo percurret totam Ellipſim eodem prorſus ordine, quo Hyperbolam

Digitized by Google

jam totam percurrebat. Bini Hyperbolæ rami MVN, N'V'M' reſpondent binis ſemiellipſibus MVN, N'V'M', & quatuor arcubus hujus VM, M'V', V'N', NV, reſpondent quatuor illius crura VM, M'V', V'N', NV. Illi arcus connectuntur in binis punctis V, V', & in binis aliis itidem punctis O, O', hæc crura connectuntur in binis itidem punctis V, V', & in binis Infiniti veluti punctis ∞, ∞', quorum illud eſt in A, & B, hoc in E, & D: in quibus illi nexus eo delati per omnes finitarum diſtantiarum magnitudines delitefcunt. Unicus eſt continuus orbis Ellipſis rediens in ſe ipſam VMOM'V'N'O'NV, unicus eſt continuus geometricus orbis Hyperbola rediens in ſe ipſam per V M ∞ M' V' N' ∞' N V, neuter abrumpitur neuter terminum habet, qui binis hinc, & inde ab eo jacentibus lineis non ſit communis.

68. Et quidem contemplari jam hic licet continuum etiam tranſitum Ellipſeos ad Hyperbolam per Parabolam, & earum nexum quendam admirabilem ſane, in quo & ille tranſitus momentaneus per immenſum Parabolæ hiatum ex altera parte ad partem oppoſitam, quem num.62. contemplati ſumus per nexum rectæ in infinitum utrinque recedentis, & in ipſo infinito quodammodo redeuntis in ſeſe, iterum ſe nobis ſiſtet ſub alio aſpectu totius infiniti hiatus unico puncto æquivalentis, quod tamen ad ea jam infiniti myſteria pertinebit, quæ in vera abſurda degenerant, & quæ nobis occaſionem præbebunt tam infinitas, quam infiniteſimas quantitates abſolutas, in ſe determinatas, & actu exiſtentes tollendi de medio, quod quidem cum noſtra ipſa theoria punctorum indiviſibilium conſentit mirum in modum.

69. Notiſſimum eſt ex communiſſimis Sectionum Conicarum Elementis, ſectionem coni parallelam baſi efformare circulum, qui, ſectionis inclinatione variata degeneret in Ellipſim; Ellipſim vero ipſam motu continuo plani ſectionis ita oblongari, ut illo evadente parallelo plano cuipiam per verticem ducto, & contingenti conum, evadat Parabola, tum continuato plani ſecantis motu, evadat ipſa ſectio Hyperbola, cujus forma mutetur continuo, donec plano illo ipſo tranſeunte per verticem, deſinat Hyperbola in rectam, in quibus transformationibus Parabola unica eſt indiviſibilis terminus, per quem momento temporis a continuata ſerie Ellipſium ad ſeriem continuatam Hyperbolarum fit tranſitus. Atque hanc ipſam, & plures alias hujuſmodi transformationes curvarum harum in ſe invicem, in circulum, in rectas, ac mutationes continuas, quæ interea accidant earum punctis, ac lineis fuſe, ac diligenter in ea ipſa diſſertatione perſecuti ſumus, quam qui viderit, aliquam ſaltem non omnino tenuem geometricæ continuitatis cognitionem acquiret. Hic innuemus tantummodo,

Digitized by Google

do, quæ pertinent ad contemplandum nexum hunc in infinita diſtantia, & regreſſum cujuſvis Conicæ Sectionis in ſe ipſam ſervatum in ipſo tranſitu per ſingularem Parabolæ caſum, & punctorum receſſum in infinitum.

70. Dum nimirum motu continuo Ellipſis figuræ 11 ad Parabolam accedit, recedit tota ſemiellipſis OM'V'N'O ultra quoſcumque limites in infinitum, & ipſa etiam puncta O, O' a ſe invicem in infinitum recedunt, creſcente in infinitum axe conjugato Ellipſeos. Eo momento temporis, quo Ellipſis jam evaſit Parabola, puncta O, O' cum omni arcu M'V'N' nuſquam jam ſunt, ſed infinito ipſo veluti obruta deliteſcunt. Remanet autem ad partes V arcus MVN binis cruribus in infinitum productis nuſquam interruptus, & conſiſtens, ſed in illa infinita diſtantia punctorum O, O' in infinito deliteſcentium adhuc quodammodo continuatus, quæ erat ſuperior illa & rectæ, & Parabolæ idea redeuntis in ſeſe in diſtantiis oppoſitis. Continuato autem motu plani ſecantis, ſectio evadit Hyperbola figuræ 10 per regreſſum ex Infinito ad partes oppoſitas illius arcus N'V'M', qui in quavis Ellipſi in fig. 11 connectebatur cum arcu MVN in punctis illis determinatis O, O', in Parabola Infinito obrutus nuſquam erat, in Hyperbola connectitur cum ipſo quodammodo in binis Infiniti punctis altero in B, & A, altero in D, & E.

71. Atque hinc multa conſequuntur, quæ ad Sectionum Conicarum naturam, & Geometricam continuitatem intelligendam apprime faciunt, in quibus illud, axi finito Ellipſeos VCV', poſito C in centro, non reſpondere in Hyperbola axem finitum VCV', ſed axem V ∞ V' ex parte oppoſita traductum per infinitum, nec centro Ellipſeos finito C centrum Hyperbolæ itidem finitum C, ſed aliud in infinito deliteſcens, & viceverſa. Cum nimirum juxta num. 60 utrobique ab V ad V' in recta linea conſiderata per modum infiniti circuli habeatur & finitum ſegmentum VCV', & aliud V ∞ V' traductum ex parte oppoſita per infinitum, ac illud ſecetur bifariam in C, hoc in ipſo infinito ∞, utraque curva bina habet centra alterum in C, alterum in ∞, ex quorum altero ad alterum omnes diametri tendunt, & centro C Ellipſeos, cui ipſa Ellipſis obvertit cavitatem binis ſemiellipſibus OVO', OV'O ipſum ſpectantibus reſpondet non centrum C Hyperbolæ, cui ea non cavitatem, ſed convexitatem obvertit, ſed centrum in Infinito deliteſcens ∞, cui pariter obvertit cavitatem; unde etiam conſequitur, axem conjugatum Hyperbolæ non reſpondere ullo pacto axi conjugato Ellipſeos, ut & alia multa, quorum ope plurima in eadem illa noſtra diſſertatione haud ſane infeliciter explicantur, & oſtenditur in iis omnibus, quæ ad finitas quantitates pertinent, per hoſce tranſitus per infinitum cum perfecta Geometriæ

metriæ analogia componi ea omnia, quæ ipſi maxime adverſari viderentur, ut illud oſtenditur, cur licet ſumma quadratorum binorum axium, & binarum quarumvis diametrorum conjugatarum in Ellipſi æquetur ſemper quantitati conſtanti, & licet quantitatum quarumvis, utcumque e poſitivis migrantium in negativas, mutata directione, quadrata debeant poſitiva eſſe, adhuc tamen in Hyperbola non ſumma, ſed differentia eorumdem quadratorum debeat eſſe conſtans. Sed ea ibi luculentius pertractavimus, & præterquamquod prolixiora ſunt, quam ut arctiſſimis, qui nobis hic conſtituti ſunt, limitibus, coerceri poſſint, plures requirunt ipſarum Conicarum Sectionum proprietates in earum elementis a nobis demonſtratas, & multa, quæ ad poſitivorum, ac negativorum naturam pertinent, quæ nos hic nondum attigimus, ac paullo inferius vix attingemus.

72. Interea tamen, quoniam ejuſmodi nexus continuarum linearum in Infinito myſteria nobis quædam exhibuit, quæ videntur humanæ mentis captum excedere, ſed contradictionem involvere nondum videntur ullam; proderit conſiderare ſublimiora quædam myſteria, quæ ibidem ſeſe nobis objiciunt, & in abſurda vera migrare demum videntur: cujus generis multa perſecuti ſumus uberius in diſſertatione illa ipſa, & quæ nobis demum perſuaſerunt illud; lineam actu exiſtentem in infinitum protenſam nullam eſſe poſſe, ſed infinitum ipſum eſſe indefinitam potentiam removendi reale punctum a reali puncto ultra quoſcumque limites utcumque ad libitum determinatos, quæ diſtantia quotieſcumque exiſtat, finita eſſe debeat, ſed quacumque finita alia major eſſe poſſit ita, ut nulla ſit poſſibilium ultima, & maxima: quemadmodum nulla eſt poſſibilium prima, ac minima, qua de re paullo inferius; hic autem ipſa myſteria ejuſmodi, ut ſe nobis objicient ſponte ſua, perſequemur.

73. Dum Ellipſis motu continuo producitur, ac demum in Parabolam migrat, defigatur mentis acies in figura 11 in motum continuum arcus OV'O', & rectarum VF2, VF5. Ille arcus ita recedet in Infinitum, ut puncta quidem O, O' etiam ipſa, ut monuimus, recedant a ſe invicem, & a centro C in Infinitum; & in caſu Parabolæ nuſquam jam erunt, Infinito ipſo demerſa atque obruta, hiatus autem ipſæ Parabolæ in infinitum excreſcet; at rectæ VF2, VF5 licet ſemper tranſeuntes per illa ipſa puncta O, O' a ſe invicem, & ab axe VV' recedentia in infinitum, perpetuo accedent ad ſe invicem, & ad axem, angulo F2VF5 decreſcente ultra quoſcumque limites, ut in caſu Parabolæ coeant inter ſe, & cum ipſo axe VV', & angulus ille F2VF5 penitus evaneſcat. Concipiatur enim centro V, quovis finito radio ſemircuius occurrens tangenti QR in K, L, axi VV' in H, ac rectis omnibus VF in I, ducaturque I2I5 occurrens ipſi VV' in S.

 74. Quo-

74. Quoniam in Ellipſi eſt latus rectum principale ad axem conjugatum, ut hic ad axem tranſverſum, & latus rectum finitum remanet, abit enim in latus rectum Parabolæ, axis autem conjugatus Ellipſeos in Parabolam deſinentis in infinitum excreſcit, excreſcente hiatu in infinitum, decreſcet in infinitum ratio lateris recti principalis ad axem conjugatum, & proinde hujus ad tranſverſum, adeoque, & ſumptis dimidiis ratio OC ad CHV, & multo magis ratio CO ad OV, ſive I2S ad I2V; nimirum ſinus anguli I2VH, ſive F2VV' decreſcit in infinitum: ac proinde factis VV', OO' abſolute infinitis, penitus evaneſcet ſinus ipſe, & angulus F2VV', & proinde etiam ejus duplus F2VF5 debet penitus evaneſcere. Debent igitur puncta I2, I5 cum omnibus intermediis coire in H, evaneſcente omni arcu intermedio, ac per omne finitum intervallum utcumque magnum rectæ VF2, VF5 coire inter ſe, & cum axe.

75. Ex hoc congreſſu eorum punctorum, & anguli F2VF5 evaneſcentia ſtatim intelligitur, qui fieri poſſit, ut in fig.7 punctum P motu immediato tranſeat a crure VM, ad crus NV per axem. Nam in fig.11 a puncto P1 ad punctum P6 tranſibatur in Ellipſi per appulſum ad rectam VF2, ad omnes intermedias in angulo F2VF5, & ad ipſam VF5 motu continuo. Si arcus KHL referat tempus, omnis arcus VMO percurrebatur tempore continuo KI2, momento temporis I2 appellebat punctum P ad rectam VF2, tum tempore continuo I2HI3 percurrebatur totus arcus OM'V'N'O', & altero momento temporis I5 appellebat punctum P ad O', tum demum tempore continuo I5L per arcum O'NV redibat P ad V. Coeuntibus jam punctis I2, I5, ſublatum eſt totum illud intermedium tempus, & momento temporis; factus eſt tranſitus.

76. Pergente motu plani ſecantis, & Sectione verſa in Hyperbolam, puncta O, O' figuræ 11 remanent in fig.10 in infinita diſtantia, ita tamen, ut illud ſit æque in diſtantia infinita ex parte F2, & B, ac ex parte G2, & A, hoc autem æque in diſtantia infinita ex parte F5, & D, ac ex parte G5, & E, ubi illud adhuc conjungat quodammodo crus infinitum VM cum crure M'V', hoc vero crus infinitum VN cum crure N'V', converſa idcirco poſitione ramorum, ut arcus dexter abierit in crus ſiniſtrum, ſiniſter in dexterum.

77. In caſu autem Parabolæ, quid acciderit referet figura 12. Puncta I2, I3, I4, I5, coierunt ibi cum H: In infinito demerſa latent puncta omnia O, O', P2, P3, N', V', M': in axem abeunt F2, F3, F4, F5, & quoniam tam Ellipſis, quam Hyperbola poteſt in eam Parabolam degenerare, prout motus plani ſecantis in hanc, vel vel in illam plagam dirigitur, oportet, tam ad partes H, quam ad par-

partes V in Infinito delitеſcant ex æquo, quæ plagæ in unum ibi quodammodo coeant, & continuitatem ſervent.

78. At hic jam myſteria eo excreſcunt, ut abeant in abſurda. Debent enim coeuntibus rectis VF2, VF5, figuræ 11, ita coire puncta O, O' illius in fig. 12, ut intervallum illud, ille hiatus, qui rectis penitus congruentibus nullus eſſe poteſt, penitus evaneſcat, licet idem ſimul in infinitum excreſcat; ac idem accidere debet infinitis punctis P3, P4 circa M', & N'. Rectæ VF2, VF5 per quamvis utcumque magnam finitam diſtantiam debent congruere penitus, & tamen in infinita diſtantia ab V debent a ſe invicem in infinitum diſtare, quaſi omnis diſtantia finita indefinite accepta in infinitum non abeat, & rectitudini non repugnet immenſa accurata præcedens congruentia conjuncta cum immenſa poſteriori diſtantia.

79. Nec vero hæ difficultates eludi poſſunt, dicendo, ubi Ellipſis in Parabolam abit, arcum I2HI5 in fig. 11 nequaquam evaneſcere omnino, ſed evadere infinite parvum, ac proinde angulum F2VF5 eſſe adhuc infiniteſimum, in quo in diſtantia infinita primi ordinis haberi poſſit intervallum finitum, ac in diſtantia infinita ordinum ſuperiorum intervallum etiam infinitum haberi debeat. Nam in primis in illa ipſa toties memorata diſſertatione luculenter demonſtravimus, terminum, qui poſt infinitum abſolutum, & finitum fit tertius, debere eſſe prorſus nihil, non quidpiam, quod licet infiniteſimum eſſe dicatur, fit aliquid, & partes habeat. Deinde ſi adhuc circa punctum H eſſet aliquis infiniteſimus arcus rectis F2V, F5V concluſus, licet ipſe infiniteſimus dicatur eſſe, & inaſſignabilis, haberet tamen in ſe ipſo aliqua puncta, per quæ tranſirent aliquæ rectæ ductæ ex vertice V in ſe determinatæ, licet a nobis inaſſignabiles, quæ ab axe diſtantiam aliquam haberent, & tamen in crura Parabolæ infinita nequaquam incurrerent. At in Conicis Sectionibus per finitam Geometriam accuratiſſimè demonſtratur, quamvis rectam utcumque parum inclinatam ad axem cruri Parabolæ licet in immenſum recedenti ab axe ſemper alicubi occurrere iterum, adeoque prorſus nullam eſſe, quæ in hiatum illum ſeſe abdat.

80. Et quidem in Diſſertatione de natura, & uſu infinitorum, & infinitè parvorum aliquot ab hinc annis edita, infiniteſimas quantitates in ſe determinatas, utcumque a nobis inaſſignabiles, nullas omnino eſſe poſſe, demonſtravimus argumento, quod nobis quidem eam evidentiam parit, ut nunquam in animum inducere poſſimus, ut ejuſmodi infinite parvas quantitates admittamus, longe alia ratione præclariſſimas infiniteſimorum methodos evolventes per indefinite cognita, abſtrahendo mentem a magnitudine, quorum uberius exponendorum non eſt hic locus, exponemus autem in quarto Elementorum

rum

num Tomo diligentiſſimè. Illud noſtrum argumentum tantummodo hic perſtringemus ad evincendam impoſſibilitatem infiniteſimorum in ſe determinatorum nobis etiam inferius futuram uſui: eſt autem hujuſmodi.

81. Si poteſt haberi quantitas aliqua, ut lineola, quæ ſit infinite parva, ac licet a nobis inaſſignabilis, ſit in ſe ipſa determinata, ea continebitur infinito numero in quavis quantitate finita, ut in palmo, qui palmus ejuſmodi lineolarum continebit numerum infinitum, atque ita continebitur, ut quævis ex iis per ſe etiam ſola poſſit ſubſiſtere, nec a ſociis pendeat ullo modo, utpote quæ in ſe determinata eſt, & ab earum ſingulis diſtincta, licet non actu diviſa. Hinc incipiendo a parte ſiniſtra erit aliqua licet a nobis inaſſignabilis verſus dexteram partem prima, ſecunda, tertia, & ita porro, ac itidem incipiendo a parte dextera verſus ſiniſtram erit aliqua ſecunda, tertia, & ita porro. Jam vero priores illæ, quæ ex parte ſiniſtra jacent, relinquent poſt ſe verſus partem dexteram numerum earum partium infinitum, cum fere totum palmum relinquant; illæ autem, quæ erant priores ex parte dextera, relinquent verſus ipſam dexteram partem numerum non infinitum, nam prima relinquet nihil, ſecunda relinquet unicam, tertia binas, & ita porro. Nulla autem erit ejuſmodi particula in univerſo illo palmo, de qua alterum ex iis verum non ſit, ut relinquat verſus dexteram earum numerum infinitum, vel numerum non infinitum, nec ulla ex iis ab alia ita pendebit, ut ea manente deſtrui non poſſit, cum unaquæque ſuum eſſe habeat in ſe determinatum, & a quavis, ut diximus actu diſtincta ſit, licet nondum actu diviſa.

82. Binæ igitur ibi habentur claſſes particularum, licet a nobis inaſſignabilium, quarum prima continet omnes & ſolas particulas relinquentes verſus partem dexteram numerum partium infinitum, ſecunda omnes, & ſolas relinquentes non infinitum. Id ſane evidens eſt ex eo, quod ipſarum nulla utroque ex iis binis caracteribus carere poſſit, nulla utrumque ſimul habere, & ſint omnino, quæ primum habeant, ſint, quæ ſecundum. Porro omnes illæ quæ ſecundam claſſem conſtituunt numero infinitæ eſſe debent, aliter enim poſtrema ex iis, quæ in priore ſunt claſſe, & quæ relinquit omnes illas, & ſolas, quæ conſtituunt ſecundam, non relinqueret numerum infinitum, adeoque non ad eam claſſem primam pertineret, ſed ad ſecundam. Omnium autem, quæ in ſecunda claſſe ſunt, præter primam numerus debet eſſe non infinitus. Si enim & is infinitus eſſet, prima illa, quæ haſce omnes relinquit, relinqueret numerum infinitum, ac proinde non ad ſecundam, ſed ad primam claſſem pertinuiſſet. Quamobrem a numero infinito, ad non infinitum per unitatem ſit tranſitus, quod eſt

Digitized by Google

eſt abſurdum . Vis tota argumenti ſita eſt in eo , quod ab infinito ad non infinitnm neceſſario alicubi in unica particula tranſitus haberetur, quod argumentum majorem habebit vim ſi concipiamus a Deo deſtrui omnes , & ſolas illas , quæ ad primam pertinent claſſem , quarum quælibet , a quavis ex iis , quæ conſtituunt ſecundam , omnino diſtinguitur in ipſa, licet a nobis non diſcernatur, nec aſſignari omnino poſſit .

83. Sunt , qui ut evincant, quantitates infiniteſimas exiſtere etiam independenter a noſtro concipiendi modo , adducant angulum contactus, quem arcus circuli cum recta , vel cum circuli alterius arcu tangente , efficit in contactu ipſo , quem dicunt eſſe infiniteſimum reſpectu anguli rectilinei . Liceret , ex Tacqueti doctrina reſpondere , angulum non eſſe quantitatem , cum in inclinatione conſiſtat , ſed quantitatis modum . Et quidem rectilineum angulum per modum quantitatis tractamus , ſumendo arcum circuli ejus cruribus interceptum , qui verè quantitas eſt , pro ejus menſura , quod in rectilineo , & curvilineis curvarum æqualium , & ſimilium , fieri poteſt , ubi crura e circulis utcumque magnis vel parvis eundem graduum , ac minutorum numerum abſcindunt , non iis , quorum crura diverſæ naturæ ſunt , ut varietur cum circuli radio , etiam ratio arcus intercepti ad totam peripheriam ; adeoque varietur & menſura ipſa , & relatio , quæ ab ipſa menſura omnino pendet . Id autem ipſum diſcrimen ſatis eſt nobis , ut licet angulum dicamus quantitatem , angulum mixtilineum putemus ſpecie diverſum a rectilineo . Porro inter ea , quæ ſpecie differunt , alterum reſpectu alterius nullam reipſa rationem habet , adeoque nec infiniteſimum eſt , nec infinitum .

84. Alii quantitates incommenſurabiles in ſubſidium vocant , & ajunt , id per quod una linea eſt alteri incommenſurabilis , eſſe aliquid re ipſa infiniteſimum , quod ſic conantur evincere . Si dicatur , eſſe aliquid finitum , ſecetur illa altera quantitas in tot particulas æquales , ut una ex iis illa quantitate finita ſit minor , quod fieri ſemper poſſe facile demonſtratur . Tum , eâ particulâ translata continuo in primam illam incommenſurabilem , devenietur ad reſiduum ea minus , adeoque minus illa quantitate finita , per quam dicebatur eſſe incommenſurabilis illa prima ſecundæ . At in eo argumento , ſi rite continuitatis natura ſpectetur , fallacia eſt manifeſta , & indeterminatum aliquid pro determinato aſſumitur . Cum enim dicimus *incommenſurabilis* , excludimus menſuram communem . Menſura autem, niſi definiatur ejus quantitas , non eſt aliquid determinatum, ſed indefinitum , & indeterminatum , ut de parte ſuperius diximus , cum eodem recidat menſura , ac pars aliquota . Si quæratur per quid prima linea eſt ſecundæ incommenſurabilis ? reſpondebimus , relate ad quam men-

Digitized by Google

menſuram ? Determinetur menſura, determinabitur quantitas, per quam relate ad illam menſuram incommenſurabilis eſt, quæ erit reſiduum illud, utique finitum, & ipsâ illâ menſurâ minus. Imminuta menſura, illud reſiduum aliquando minuitur, aliquando augetur, cum ad eam habere poſſit rationem quamcumque; at ea in infinitum imminuta imminuitur tandem etiam illud in infinitum, cum ſemper ipſa minus eſſe debeat. Verum cum nulla ſit menſura ultima, & omnium minima, nulla eſt pars in ſe determinata, per quam reſpectu cujuſque menſuræ incommenſurabilis ſit prima illa quantitas quantitati ſecundæ.

85. Ut res evidentior evadat ipſis oculis ope Geometriæ, ſubjecta, ſit in fig. 13 AB quantitas major incommenſurabilis minori AD, Hac translata in AB quoties licet, reſiduum erigatur perpendiculariter in DF, tum ejus dimidio AG, triente AK, quadrante AN &c. pariter translato erigantur reſidua ſingula pariter in GI, KM, NP &c, producanturque omnia ejuſmodi perpendicula uſque ad rectam AC ductam in angulo ſemirecto BAC in E, H, L, O, ac concipiatur curva quædam continua per omnia puncta F, I, M, P. Patet omnia perpendicula DE, GH, KL, NO &c. æquari ob angulum ad A ſemirectum, & alterum rectum, partibus aliquotis, ſive menſuris AD, AG, AK, AN, quibus cum reſidua illa DF, GI, KM, NP minora ſint, tota ea curva continebitur angulo BAC. Porro patet imminui poſſe in infinitum partem aliquotam AN, adeoque NO ita, ut ſemper NP ſit minor. Nullam autem fore minimam omnium NP, ut nulla erit minima AN, adeoque nullam, per quam præciſe incommenſurabilis ſit, ſed menſuræ cuilibet ſuum reſpondere reſiduum, per quod relate ad eam menſuram incommenſurabilis ſit, quod determinatum ſit, & indefinitum, ut nomen menſuræ, ſeu partis aliquotæ eſt indeterminatum, niſi partium numerus, vel magnitudo determinetur, quibus determinatis, evadit determinatum, & finitum.

86. Conſtat igitur, infiniteſimas quantitates in ſe ipſis determinatas nullas eſſe, adeoque ipſas a noſtro ſolum indefinito cognoſcendi modo pendere. Quamobrem inane eſt effugium illud, quo abſurda ex Ellipſi in infinitum excreſcente, & Parabolæ cruribus actu in infinitum productis omnino profluentia devitentur. Verum demus, infiniteſimas ejuſmodi quantitates non eſſe impoſſibiles, adhuc abſurdum ex infinita Parabolæ extenſione profluens manifeſtiſſimum deprehenditur, quod in illa ipſa toties memorata diſſertatione protulimus, & huc ad rem confirmandam transferemus.

87. Concipiatur in fig. 7. centro V circulus quidam abſolute infinitus, & tangens AB producta utrinque intelligatur in infinitum, quæ proinde erit ipſius circuli diameter, & erit idcirco major quarta ipſius peripheriæ parte. Cum vero ex quovis tangentis Q, vel Q'

pun-

punĉto duĉtæ reĉtæ ipſi normales incurrant in perimetrum ipſius Parabolæ in P, vel P', patet, hiatum Parabolæ ipſius MN æquari toti tangenti infinitæ AB, adeoque debere eſſe majorem quadrante Peripheriæ illius infinitæ. Ex altera parte, quoniam facto angulo EVF, EVF' utcumque exiguo, ſemper reĉtæ VF, VF' occurrunt perimetro in F F', adeoque exeunt extra ipſum hiatum, hiatus ipſe debet intercipere ex infinita illa peripheria partem, quæ ad totam peripheriam habeat rationem minorem quavis determinata. Erit igitur ille hiatus & major quadrante infinitæ peripheriæ, & eodem infinities minor, quod eſt abſurdum manifeſtiſſimum.

88. Reſpondebitur, quoniam imminuto angulo FVE in infinitum, minuitur pariter ratio tangentis ejus anguli ad radium, adeoque ratio RP ad RV, ſive ratio VQ ad VR, & totius QQ' duplæ illius ad VR, punĉtis P P' abeuntibus in infinitum, infinities majorem eſſe axem VE infinitum tangente AB. At ſi concipiamus ſolas reĉtas AB, DE in infinitum produĉtas, nemo non videt, utramque æque produci poſſe, & omnia eſſe paria. Qui igitur fit, ut adveniente deinde Parabola MVN, axis VE infinities major eſſe debeat tangente VA? Quid illa Parabolæ appoſitio ad reĉtarum mutationem conducit? Quid vero ſi Parabola alia potius collocaretur, cujus axis eſſet VA, tangens VE? Jam illa VA, quæ erat infinities minor, contra infinities major evaderet. Id ſane jam non myſterium quoddam eſt, ſed abſurdum.

89. Abſurda autem in Infinito alia etiam plurima nobis occurrunt, quorum aliqua in illa diſſertatione protulimus. At unum hic adjiciemus, quod ſimpliciſſima demonſtratione conficitur, & in Diſſertatione alia de Natura, & uſu infinitorum, & infinite parvorum pariter ſupra memorata protulimus. Eſt autem hujuſmodi. Sit in fig. 14. quivis angulus ABC, quem bifariam ſecet reĉta BD, & ex quovis punĉto E lateris BC ducatur reĉta EF parallela BA, occurrens BD in F, producaturque duplo magis in FG; tum per B, & G ducatur BM, ac concipiatur alia *efg* ipſi EFG parallela. Conſtat omnem aream infinitam CBD fore æqualem areæ infinitæ ABD, cui ſuppoſitis æqualibus angulis, congrueret. Conſtat itidem, triangula FBG, FBE, & *f*B*g*, *f*B*e* eſſe, ut baſes, adeoque illa his dupla, & aream FG*gf* duplam areæ EF*fe*. Sed ſi concipiantur aliæ, atque aliæ ejuſmodi parallelæ in infinitum, quævis area iis intercepta concluſa angulo MBD eſſet dupla areæ ſibi reſpondentis incluſæ angulo DBC. Quare cum areæ omnes iis angulis concluſæ ſint illarum areolarum omnium aggregata; area infinita contenta angulo DBM eſſet dupla areæ contentæ angulo DBC, adeoque & areæ concluſæ angulo ABD, ſive pars dupla totius, quod eſt abſurdum.

90. Abſur-

Digitized by Google

90. Abſurdum ipſum totum oritur ex illa abſoluti infiniti ſuppoſitione. Si enim centro B fiat circulus occurrens rectis BA, BD, BC in I, H, E; donec habebitur finita magnitudo BE, nihil abſurdi erit. Sector EBH, erit æqualis Sectori HBI, & triangulum GBF erit duplum trianguli FBE. Sed nec illud triangulum erit pars illius Sectoris, neque hoc æquale huic. At abeunte E in infinitum ita, ut nuſquam jam ſit, & aſſumpta tota longitudine, quæ haberi poteſt in recta infinita BE, jam nulli habentur limites illi infiniti. Ex alia parte tota infinita area, quanta haberi poteſt in angulo MBD componitur ex omnibus areolis GF*fg*, & area BBC, quanta haberi poteſt, componitur ex omnibus FE*ef* quæ quidem æqualis eſt toti ABD, & ipſius ABD pars eſt MBD, in quo habetur abſurdum illud.

91. Hinc nobis extenſum, & infinite parvum, & infinite magnum actu exiſtens, & in ſe determinatum eſt prorſus impoſſibile, & quidquid quovis temporis momento exiſtit, finitum eſt, ita tamen, ut augeri, & minui poſſit ſine ullo limite in infinitum, ac infiniti extenſi impoſſibilitas unde fluat, ex Metaphyſicis etiam principiis quibuſdam cum Geometria conjunctis diligenter perſecuti ſumus in illa diſſertatione elementis Sectionum Conicarum adjecta. Binorum punctorum quorumcumque diſtantia finita eſt ſemper, ſed ſemper & aliæ minores haberi poſſunt, in qua poſſibilitate minuendi, vel augendi diſtantiam s nobis indefinite cognita arbitramur ideam quantitatis infinite parvæ, vel infinite magnæ conſiſtere. In Geometria autem, quæ ſpatium ut actu infinitum conſiderat, lineæ conſiderantur tanquam actu in infinitum productæ, ex qua deinde productione omnes illi nexus in ipſo infinito, & myſteria, quæ perſequi cæpimus, conſequuntur, quæ tamen ad intelligendam melius continuæ extenſionis naturam, ubi de finitis quantitatibus agitur, adhuc conducunt. Eadem autem poſt hanc de infiniteſimis, & infinitis digreſſionem non inutilem ad eam rem etiam, de qua agimus, ut conſtabit inferius, conſiderare pergemus, infinitorum crurum naturam, & nexum in Infinito, quam breviſſime fieri poterit innuentes.

92. In primis quotieſcumque crus aliquod ſive parabolicum, ſive hyperbolicum abit in infinitum, ſemper, ut diximus, ex infinito etiam regreditur. Illud autem in Hyperbolicis ſanctiſſime obſervatur, ut quam aſyptotum habet crus in infinitum recedens, eamdem habeat etiam crus ex infinito regrediens, licet poſſit vel ex eadem parte, vel ex oppoſita regredi ejuſdem rectæ infinitæ. Si in fig. 15. arcus VM abit infinitum per M1 ex parte B, poteſt regredi tam ex parte eadem B citra ipſam aſymptotum ACB, ut per M2 V2, & ultra ipſam, ut per M3 V3, quam ex parte oppoſita A' citra aſymptotum eamdem pariter, ut per M4 V4, & ultra, ut per M5 V5. Poſteriores tres

caſus

caſus habentur omnes in Hyperbolis altioribus, in quibus eſt aliqua potentia ordinatæ in ratione reciproca alicujus potentiæ abſciſſæ, ut de Parabolicis quoque cruribus vidimus num.64, prout potentiæ ejuſmodi fuerint pares, vel impares, quemadmodum in illa diſſertatione adjecta elementis demonſtravimus; ubi & primi caſus curvas quaſdam determinavimus.

93. Id quidem ipſum ſanctiſſime obſervatur ex eo, quod in omnibus Geometricis curvis, nihil uſquam mutatur per ſaltum, ſed mutationes omnes motu continuo fiunt. Id ipſum autem in cæteris omnibus curvarum geometricarum proprietatibus quibuſcumque pariter evenit, ut etiam in tangentibus (quo nomine appellatur recta, per curvæ punctum ducta ita proxima ejus arcui inter omnes, quæ inde duci poſſunt, ut nulla alia in utriuſque angulo duci poſſit per idem punctum, ſive iis interſeri), ut nimirum ubicumque tangens ducitur per punctum connectens binos arcus ſe continuo excipientes, & ſit communis tangens utriuſque partis, in quam deſinant motu continuo tangentes omnes reliquæ punctorum ad eoſdem arcus pertinentium, & deſinentium in illud punctum motu continuo; cumque aſymptoti a Geometris conſiderentur tanquam quædam rectæ crura illa contingentes in infinita diſtantia, in qua ſe bina illa crura connectunt, communem etiam ibi tangentem habere debent, adeoque communem aſymptotum.

94. Porro eadem illa lex tangentium communium ubique obſervatur in curvis omnibus ubicumque in iis aſſumatur punctum quodpiam, ex qua lege per univerſam Geometriam latiſſime patente, quatuor habentur caſus, quorum bini bina cuſpidum, ſeu regreſſuum genera exhibent, unus flexum contrarium, & unus frequentiſſime occurrens progreſſum curvaturæ in eamdem plagam. Tangat in fig.16 recta AB arcum M V, & ſit DVE ipſi perpendicularis. Ipſe arcus ad V delapſus poteſt vel regredi ex V in angulo eodem BVD, per VN 1, ſive in angulo BVE ipſi adjacente ad eamdem tangentis partem B, ſeu ultra ipſam per VN2, vel progredi in angulo ad verticem oppoſito AVE, per VN3, vel pariter progredi in reliquo angulo AVD per VN4. Quartus hic caſus MVN4 communis eſt curvis omnibus, & generaliter omnibus arcuum continuorum punctis, præter puncta quædam quarumdam curvarum determinata, quæ aliquem continent ex prioribus tribus, & congruit cum caſu figuræ 7. Tertius MVN3 flexum contrarium ſecum trahit, curvatura obverſa prius puncto D, tum puncto E, & congruit cum caſu figuræ 9. Secundus MVN2 cuſpidem habet, quam primi generis dicimus, cum tangens binis arcubus in contactu conjunctis interjacet, & congruit cum caſu figuræ 8,

Digitized by Google

ræ 8 , ac curvaturam , ut tertius , in contrariam obvertit partem . Atque hi tres habentur in illis Parabolis quarum ordinatæ ſunt in aliqua ratione abſciſſæ , ut monuimus num.64. Primus demum MVN ſ continet cuſpidem ſecundi generis efformatam ab arcubus ad eamdem tangentis partem jacentibus , cujuſmodi curvæ exemplum in eadem illa dedimus diſſertatione . In horum autem caſuum ſecundo , & tertio tangens ipſa arcum in eodem puncto, in quo contingit,ſecat etiam, ut patet , in primo , & quarto non ſecat .

96. Continuitatis legem violari arbitrantur nonnulli in primo, & ſecundo cuſpidum caſu , ob regreſſum illum , & in ſecundo , ac tertio ob curvaturam in contrarium repente converſam , At neutro in caſu detrimentum continuitatis haberi ullum videbimus , ubi ipſam legem explicaverimus paullo inferius . Illud hic cavendum tantummodo , ne confundatur cum puncto regreſſus , & cuſpide , punctum duplex , in quo curva ſe ipſam ſecat , quod ubique fit in iis curvis , quæ nodum habent. Ejuſmodi eſt in fig.17 curva MOVCFIVPN , quæ ſe interſecat in V , ac nodum efficit in ſe ipſam regreſſa , cujuſmodi nodus, præter curvas alias innumeras ſublimiores , in Concoide etiam citeriore occurrit . Videtur in V haberi cuſpis quædam MVN ; ſed ſecus accidit , cum arcus MV non continuetur in V cum arcu VN , ſed ipſum ſecet progreſſus ultra V per VC, & inde iterum ad V regreſſus per IV . In illo occurſu V tangentes AVB , A'VB' inclinantur ad ſe invicem , & angulum continent . Verum quotieſcumque ex mutatis curvæ conditionibus , curva ipſa ita mutatur , ut nodus VCFIV evaneſcat , quod pariter in Concoide contingit , ſemper bina crura MV, VN continuantur , & cuſpis MVN gignitur figuræ 18 , in quo tamen caſu ſemper binæ illæ tangentes in unicam coaleſcunt , nec unquam accidit in univerſa Geometria , ut bini arcus contigui , communi termino copulati , binas in eo tangentes habeant , quæ aliquem angulum conſtituant .

97. Plurima alia ſupereſſent dicenda de curvis , quæ vel finitum habent ramorum numerum quemcumque , vel etiam infinitum , cruribus in infinitum productis , quas inter admirabilis maxime , & notatu digniſſima logiſtica communis , quæ licet videatur unicum habere ramum, crure ex altera parte Hyberbolico, ex altera Parabolico , ipſis cruribus ne in illa quidem infinita diſtantia redeuntibus , & connexis, re vera infinitos habet ex utraque axis parte ad eumdem locum Geometricum pertinentes , communi infinitorum crurum aſymptoto , ac plurima de ſpiralibus curvis , quarum bini , vel quotcumque arcus in infinitum abeant , alii circa datum punctum perpetuo convertantur , quin in ipſum recidant , vel ad datos circulos , aut ad datas ovales in infinitum accedant perpetuo circumducti , nec tamen uſpiam in eas inci-

incidant, cujus generis mira admodum, & utilis ſpiralis logarithmica, quam itidem, licet unicum habere videatur arcum ſpiralem hinc in infinitum recedentem a dato puncto, inde accedentem, demonſtrare poſſumus, habere infinitos, ut etiam ſpirales aliæ quamplurimæ ex ea ortæ ſatis miræ; plurima de aliis curvarum generibus, in quibus plures ſunt arcus ſive redeuntes in orbem, ſive abeuntes in infinitum, quarum alii nullam cum aliis licet ad eumdem geometricum locum pertinentibus communicationem habent ita, ut punctum ex altero in alterum commigrare nullo modo poſſit, quæ tamen dum transformantur, mutatis conditionibus, ſe diſcindant quodammodo, & arcus permutent ſuos ita, ut e binis arcubus ad diverſos ramos, vel orbes pertinentibus prius, oriatur novus quipiam continuus, cujuſmodi exempla plurima occurrunt, & elegantiſſima ſane in Concoidibus habentibus circulum pro axe, quarum Concoidum, & ſpecies ſunt plurimæ, & transformationes ſatis miræ. Ea omnia, & alia quamplurima ſupereſſent, quæ brevis diſſertatiunculæ limitibus coerceri non poſſunt, perſequemur autem uberrime in quarto noſtrorum elementorum tomo, quem infiniteſimorum, & infinitorum Geometriæ, ac curvarum proprietatibus deſtinavimus.

97. In hiſce omnibus curvarum generibus illud ubique ſervatur ſanctiſſime, ut nuſquam in unico quodam puncto curva ſiſtat, ac ibi veluti abrumpatur, ſed ſemper punctum quodcumque, ad quod curva quæpiam deveniat, licet id punctum ſit etiam in Infinito deliteſcens, conjungat binos arcus hinc & inde, quorum id communis terminus ſit. Et id quidem pro curvis omnibus, vel ex natura ipſa termini erui poteſt, ut num. 54. præſtitimus, vel inductioni ampliſſimæ curvarum omnium, quæ Geometris notæ ſunt comprobari. Verum pro curva quadam, cujus maximus nobis uſus erit inferius in lege Continuitatis demonſtranda, geometrico etiam rigore demonſtratur. Propoſitio eſt hujuſmodi. *Nullus locus Geometricus poteſt uſpiam abrumpi, qui relatus ad axem quemdam per ordinatas ipſi utcumque inclinatas in eodem angulo, nuſquam habet aut impoſſibilem ordinatam reſpondentem axis puncto cuicumque, aut plures ordinatas pariter eidem puncto reſpondentes.*

98. Sic facile demonſtratur. Sit in fig. 19, 20, 21 ejus loci pars altera DC, altera EF, ipſo loco abrupto in C, E. Ducantur ordinatæ CG, EH ad axem AB. Vel punctum H cadit poſt G, ut in fig. 19, vel cum ipſo congruit, ut in fig. 20, vel ipſum præcedit, ut in fig. 21. In primo caſu pro punctis omnibus intermediis inter puncta G, & H, quæ contigua eſſe non poſſunt juxta num. 10, ſed aliquam lineolam terminare debent continentem puncta infinita, nulla eſſet impoſſibilis ordinata, in ſecundo caſu haberentur binæ GC, GE pro eodem pun-

 cto G,

Digitized by Google

ĉto G, vel H, in tertio haberentur pro utroque puncto G, H, & pro infinitis intermediis binæ ordinatæ, quæ omnia ſunt contra Hypotheſim. Non poteſt igitur ejuſmodi locus geometricus uſquam abrumpi Q. E. D.

99. Tota argumenti vis ſita eſt in eo, quod bina puncta non poſſint eſſe contigua: quod ſi fieri poſſet, in caſu primo poſſet punctum H jacere immediate poſt punctum G, & ordinata poſt ordinatam, qua unica via vis argumenti eluderetur. Diximus autem ordinatam impoſſibilem, ut includeremus etiam caſum, quo ordinata ſit nulla. Si enim in primo caſu quis dicat, poſſe locum abrumpi compoſitum ex tribus lineis DC, GH, EF, binas tantum conſideraremus DC, GH, & caſus primus reduceretur ad ſecundum, deberet nimirum in G haberi ſimul ordinata GC, & ordinata zero, ultima nimirum pertinentium ad arcum DC, & prima pertinentium ad rectam GH.

100. Hiſce præmiſſis deveniamus jam ad ipſam continuitatis legem explicandam. Leibnitius illam ſine eo nomine in memorato ſchediaſmate ſic propoſuit latine redditus. *Cum differentia duorum caſuum poteſt diminui infra quamcumque quantitatem datam in datis, vel in eo, quod poſitum eſt, oportet ipſa poſſit inveniri imminuta infra quamcumque magnitudinem datam in quæſitis, vel in eo quod reſultat.* Tum idem ſic. *Cum caſus (vel id, quod datur) accedunt ad ſe invicem continuo, ac deſinit tandem unus in alium, oportet conſectaria, vel eventa, (vel id, quod poſtulatur) idem præſtent.* Demum idem generalius: *Datis ordinatis, etiam quæſita ſunt ordinata.*

101. Eos enunciandi modos, priores binos potiſſimum, aptavit Leibnitius Carteſianis legibus motus, quas hujus ipſius principii applicatione impugnabat. Statuit Carteſius in prima lege, ſi bina corpora æqualia ſibi invicem occurrant, debere retro regredi utrumque cum velocitate oppoſita, & æquali illi, quam prius habuerat, in ſecunda vero lege, ſi inæqualia ſint, debere majus quidem progredi cum ſua velocitate priore, minus vero regredi cum velocitate contraria, & æquali illi, quam prius habuerat. Binorum corporum magnitudines ſunt id, quod Leibnitius appellat, *data*, vel *poſita*, velocitates poſt conflictum, *quæſita*, *reſultantia*, *conſectaria*, *eventa*, *poſtulata*. Bini datorum caſus ſunt æqualitas corporum, & inæqualitas. Eorum differentia imminui poteſt in infinitum ita, ut ab inæqualitate ad æqualitatem demum deveniatur. Conſideretur velocitas corporis alterius, quod prius erat majus, quæ in eo habetur poſt concurſum, ut quæſitum quoddam, vel reſultans. Ipſa velocitas imminuta utcumque inæqualitate, manebit ſemper illæſa per ſecundam Carteſii legem. Ea ſublata, & mutata in æqualitatem, velocitas ipſa ſtatim ſaltu quodam extinguitur tota per primam legem ipſius Carteſii, &

Digitized by Google

ipſi ſubſtituitur oppoſita. Id legi Leibnitianæ repugnat, vi cujus ſi ordinatim mutentur, quæ dantur, ordinatim mutari debent ea etiam, quæ quæruntur, poſtulantur, reſultant.

102. Generaliter autem ſine relatione ad data, & quæſita ſic enunciari poteſt principium ipſum. Quotieſcumque binæ quantitates variabiles, quæ nimirum magnitudinem mutare poſſunt, ita inter ſe connexæ ſunt, ut determinata magnitudine alterius, alterius etiam magnitudo determinetur; ſi concipiantur binæ magnitudines prioris, & binæ poſterioris reſpondentes iiſdem binis, ac prima quantitas mutatione continua abeat a prima magnitudine ad ſecundam tranſeundo per omnes magnitudines intermedias; idem præſtabit etiam ſecunda. Prima illa magnitudo ea eſt, quam Leibnitius nominat *datum*, vel *poſitum*; ſecunda, quam appellat *quæſitum*, *reſultans*, *conſectarium*, *eventum*, *poſtulatum*. Tranſitus autem per omnes intermedias magnitudines omnium optime exprimit *ordinationem* illam, *continuitatem*, *imminutionem differentiæ* infra limites quoſcumque datos.

103. Id ipſum Jo. Bernoullius omnino intellexit in illo *Diſcurſu de motu*, qui habetur in tomo 3. ipſius operum, ubi latine itidem redditus ſic habet. *Illum dico ordinem immutabilem, ac perpetuum conſtitutum a creatione Mundi, quem appellare licet continuitatis legem, ac vi cujus quidquid fit, fit per gradus infinite parvos ... Natura non operatur per ſaltum: nihil poteſt ab uno extremo tranſire ad alind niſi tranſeat per omnes intermedios geadus*. Fieri enim non poteſt, quæmadmodum paullo infra explicabimus, ac demonſtrabimus, ut habeatur tranſitus per omnes intermedios gradus, niſi fiat itidem tranſitus per omnes intermedios ſtatus, ſive intermedias magnitudines. Quamquam illa ipſa vox gradus & aliis multis, & ipſi, ut arbitramur, Maupertuiſio æquivocationis cujuſdam occaſionem præbuit, qua in ipſa continuitatis lege impugnanda ſunt uſi, tanquam ſi impoſſibile omnino eſſet ſaltum excludere, qui dum excludi dicitur ope tranſitus per intermedios gradus, ibi maixme neceſſario includatur.

104. Maupertuiſius quidem ipſe in primo e ſuis opuſculis ſimul impreſſis Dreſdæ anno 1732, cui titulus *Eſſay de Coſmologie* pag.20, poſtea quam præcedenti pagina expoſuerat eorum ſententiam, qui corpora dura nulla eſſe in natura contendunt ob Legem Continuitatis, & Bernoullium ipſum, atque hunc eundem ejus diſcurſum indigitaverat initio paginæ 20, ut ex notula adjecta patet, hæc addit, quæ nos ſic latine reddidimus. *Fateor, me hujus argumenti vim non ſentire. Haud ſcio, an ſatis nota ſit ratio, qua motus generatur, vel extinguitur, ut affirmare liceat, ibi legem continuitatis violari. Ego ſane nec illud ſatis novi, quid ſit ejuſmodi lex. Quando ſuppo-*

nere-

Digitized by Google

neretur velocitatem augeri, vel diminui per gradus, an non haberentur ſemper tranſitus ab uno gradu ad alium? Et tranſitus omnium maxime imperceptibilis an non tantundem continuitatem violat, quantum eam violaret deſtructio ſubita Univerſi? Duo hic a doctiſſimo viro innuuntur: alterum, ignorari a nobis modum, quo gignitur velocitas, & an ibi continuitas violetur; alterum legem ipſam involvere contradictionem incluſo ſaltu in ipſis gradibus, per quos excludi debeat, qui ſaltus in quovis gradu utcumque exiguo continuitati officiat, quantum officeret ſaltus in tanta re, quantus eſt univerſus Mundus. Porro dum huic ejus impugnationi hic reſpondemus, ac ejus vim omnem conamur eludere, ut nobis quidem videmur, cum evidenti ſucceſſu, non ſolum nihil detractum volumus de doctiſſimi viri fama, cujus ingenii vim, ac præclariſſima in univerſam litterariam remp: promerita, & Europa omnis admiratur, ac ſuſcipit, & nos inprimis veneramur, verum etiam ipſa ejus tanta & apud cæteros, & apud nos ipſos exiſtimatio nos impulit ad reſponſionem adornandam, & in hac diſſertatione ipſa inprimis evulgandam, quod verebamur, ne recens exortæ, & crebreſcenti jam theoriæ noſtræ ipſa tanti viri auctoritas officeret.

105. Et quidem quod ad modum pertinet, quo velocitas generatur, oſtendemus inferius, eam juxta continuitatis legem generari ſemper, ac deſtrui: nunc quod pertinet ad ſaltum ex illa ipſa continuitatis, & graduum ſuppoſitione violatum, quod ipſam continuitatem inintelligibilem redderet, impoſſibilem, & abſurdam, re aliquanto altius repetita expediemus, ac Leibnitianam, Bernoullianam, & noſtram definitionem eodem redeuntes, quod ad rerum ſummam pertinet, exponemus.

106. In primis binas quantitates variabiles poſſe a ſe invicem pendere, & connecti inter ſe ita, ut altera mutata mutari poſſit, & vero etiam mutetur & altera, innumeris exemplis conſtat, & ipſo quotidiano uſu compertum eſt: ſic a menſura, vel pondere rerum, quas emimus, pretium pendet, & ea aucta augetur, imminuta minuitur: contra vero a tempore, quod in dato intervallo percurrendo conficitur, curſorum celeritatem æſtimamus, quam eo majorem cenſemus, quo tempus eſt brevius. Poteſt autem utraque quantitas variabilis eſſe ſimplex, vel altera ex iis componi e pluribus, inter ſe nullo nexu copulatis, a quorum omnium determinatione pendeat. Sic in ſuperiore caſu a ſola menſura, vel pondere ejuſdem rei pretium pendet, & a ſolo tempore celeritas. At generaliter celeritas mobilis cujuſvis, quod diverſis feratur temporibus, & per diverſa ſpatia, pendet a ſpatio & tempore, proportionalis illi directè, huic reciprocè.

cè. Quantitas autem motus generaliter pendet a maſſa, celeritate, & tempore, vel a mole, denſitate, celeritate, & tempore, quorum ſingulis variatis variantur; adeo ut poſſit a quocumque quantitatum numero unica quantitas pendere, & illis variatis variari.

107. Porro ſi ea, a quibus aliqua quantitas pendet, mutentur mutatione continua, & ab una magnitudine ad aliam abeant tranſeundo per omnes intermedias, etiam illa ipſa quantitas per omnes intermedias tranſibit. Id quidem multo facilius exponitur, & intelligitur, ubi binæ tantummodo quantitates inter ſe connectantur, quarum, utraque ſit ſimplex, vel conſideretur, ut ſimplex. Earum nexus in eo caſu exponi ſemper poteſt per lineas aſſumendo axem ad arbitrium, & in eo repræſentando alteram quantitatem per abſciſſas a dato puncto computatas, alteram per ordinatas ipſi in dato angulo inclinatas, quarum vertex in earum continuo excurſu per illum axem deſcribat lineam continuam ejuſmodi nexum referentem. Nam ubi una quantitas connectatur cum binis variabilibus, ut ſpatium deſcriptum cum celeritate, & tempore, nexus ille requirit ſuperficiem continuam, & de locis ad ſuperficiem tres variabiles quantitates connectentem profundiſſimum, & elegantiſſimum opuſculum edidit jam olim Doctiſſimus Clerautius adhuc puer. Si connectatur cum pluribus, omnes is nexus excedit vires Geometriæ tribus tantummodo dimenſionibus præditæ. Ad eos nexus in quocumque quantitatum variabilium numero Algebra extenditur, quæ in eo Geometriæ præſtat, quamquam ipſi præſtat contra Geometria in eo, quod nexus plurimos, in quibus non ipſæ quantitates, ſed earum decrementa, ac incrementa certam habent relationem ad ſe invicem, quod in tranſcendentibus curvis fit, exhibeat, ad quæ Algebra finita non pertingit, ſed infiniteſimalis requiritur calculus, & ſunt fortaſſe ejuſmodi nexus per lineas, & ſuperficies expreſſi, ad quos exprimendos nec finita Algebra finitas quantitates, & earum finitas potentias contemplata, nec infiniteſimalis calculus infiniteſimales earum differentias ordinum quorumcumque, & earum potentias quaſvis conſiderans omnino ſufficiat, ſed aliud quodpiam expreſſionum genus requiratur, cujus ideam habemus nullam. Hæc omnia perſequi infinitum eſſet, & vaſtis etiam voluminibus implendis materiam præberent: in iis autem omnibus continuitas quidem ſemper omnino ſervatur, multi vero caſus anomali conſiderandi obveniunt, ad ipſam continuitatis legem, & connexionis in ea conſervanda induſtriam contemplandam, illuſtrandamque per quam idonei.

108. Dicemus igitur pauca quædam, quæ pertinent ad nexum quantitatum binarum, qui habetur, ut diximus, per lineas, quod ad rem præſentem erit abunde, cum factum quodcumque ex quot-

cum-

Digitized by Google

cumque variabilibus quantitatibus, a quibus altera pendet, poſſit connecti cum tempore, conſiderando quantitatum illarum omnium, dum variantur, ſtatus determinatos pro quovis momento temporis expreſſos linea quadam continua, ut axe, & erigendo e puncto reſpondente illi ipſi momento ordinatam exprimentem magnitudinem quantitatis cum iis conexæ, quo pacto nexus etiam ille includitur, qui unus pro quantitatibus variabilibus in natura exiſtit, in qua ſingulis momentis quantitates ſingulæ ſingulas tantummodo magnitudines habere poſſunt, expreſſus per lineam a vertice illarum ordinatarum deſcriptam. Et, quidem ipſa Maupertuſii difficultas tempus reſpicit, & quantitatem perpetuo variatam, ac momentaneum ſaltum conatur inducere, ut neceſſarium, dum quantitas per omnes magnitudinis gradus variatur.

109. Porro ubi per lineam exprimitur nexus binarum quantitatum, quarum primam exprimat abſciſſa, ſecundam ordinata, fieri poteſt, ut ſingulis magnitudinibus primæ quantitatis non niſi unica reſpondere poſſit magnitudo ſecundæ, vel ut reſpondeat quicumque finitus ejus magnitudinum numerus, vel etiam infinitus, atque id ita, ut cuivis magnitudini primæ quantitatis reſpondeat unica ſecundæ magnitudinis quantitas, & tamen eadem aliqua magnitudo ſecundæ reſpondeat pluribus quocunque finito numero magnitudinibus primæ, vel etiam numero infinitis, vel ut viceverſa cuivis ſecundæ reſpondeat unica primæ, & tamen cuivis primæ reſpondeat quivis finitus, vel infinitus numerus magnitudinum ſecundæ, vel demum cuicumque numero finito, vel infinito magnitudinum quantitatis ~~cu-~~ *primae* ~~juslibet~~ reſpondeat quivis numerus magnitudinum ſecundæ finitus pariter, vel infinitus. Facile admodum eſſet exemplis illuſtrare ſingula, propoſitis etiam notiſſimis curvarum generibus. Res autem omnis pendet ex eo, quod quædam curvarum genera recta linea datam poſitionem habens axi, vel ordinatis parallelam in unico puncto ſecare poteſt tantummodo, alia in binis, vel ternis, vel quocumque finito numero, vel infinito etiam, ut evidenter patet in ſpiralibus abeuntibus in infinitum, ac poteſt altera occurrere in unico, vel in quotcumque, dum altera itidem in punctis quotcumque occurrit; ubi vero curvæ ſubſtituitur recta, ipſam quævis alia recta vel parallela ordinatis, vel parallela axi in unico tantummodo puncto ſecat. Sed hæc itidem inveſtigatio in immenſum abit, & nos in ſimpliciſſimis tantummodo caſibus quibuſdam conſiſtere cogimur.

110. In primis in ejuſmodi quantitatum geometrico nexu fieri poteſt, ut altera perpetuo creſcente, altera creſcat perpetuo, vel decreſcat, vel illa perpetuo decreſcente, hæc perpetuo creſcat, vel decreſcat, vel illa aut creſcente, aut decreſcente, hæc a creſcendo tran-

Digitized by Google

tranſeat ad decreſcendum, quo caſu habetur maximum quodpiam, vel viceverſa a decreſcendo tranſeat ad creſcendum, quo caſu habetur minimum. Ejuſmodi exempla admodum facile deſumi poſſunt a ſolo etiam circulo ad axem relato poſitum extra ipſum. Si enim in fig. 22 diameter circuli HI producta occurrat ad angulos rectos in C rectæ AB, & recta ex R ipſi AB pariter perpendicularis occurrat circulo in P, & P', creſcente abſciſſa AR, vel decreſcente AR2 evadit RP minima, RP' maxima, ubi R appulerit ad C, quod quidem in circulo & communiter in curvis accidit continuata in I, & H curvatura arcus progredientis: quandoque autem fit etiam per regreſſum arcus efficientis in I, vel H cuſpidem, quæ ſingula perſequi, & illuſtrare non vacat,

111. Fieri autem etiam poteſt, ut variata altera, decreſcat etiam altera per omnes magnitudines utcumque parvas, & evaneſcat, vel augeatur per omnes magnitudines utcumque magnas, & evadat abſolutè infinita. Si recta FG in fig. 16 moveatur motu continuo verſus ED, rectæ VR, vel BR cum quavis RP nexum exhibeat MV, vel quævis NV, appellente R ad V, evaneſcit ſecunda quantitas RP, atque id vel evaneſcente prima, ut VR, vel manente adhuc, ut BR, ubi etiam ſi VR contra creſcat in infinitum, infinitum itidem creſcit quævis RP. At in fig. 15, abeunte pariter R in C, quævis RP evadit infinita, atque id pariter vel evaneſcente prima, ut CR, vel manente finita, ut BR, ubi contra facta CR infinita, RP in infinitum decreſcit, & concipitur, ut evaneſcens.

112. Porro ubi alterius magnitudo ad nihilum devenit, vel ad infinitum, fieri poteſt, ut alterius continuata mutatione directionem mutet, quo caſu dicitur abire in negativam, vel ut cum eadem directione regrediatur e nihilo, ac pariter, ubi in infinitum abiit, fieri poteſt, ut vel in negativam abeat, præcedenti directione mutata, vel, directione manente, maneat itidem poſitiva. In fig. 16, ſi nexus exprimatur per MVN3 abeunte R in R' per V, abſciſſa BV, quæ remanſerat finita, pergit creſcere, AV decreſcere, & PR, quæ evanuerat, mutat directionem in R'P3; ſi vero nexus exprimatur per MVN4. mutat directionem, ac evadit negativa VR in VR', ſed RP' remanet poſitiva in R'P4. In fig. 15 abeunte R in R' per C, pergit creſcere BR, in BR', decreſcere AR in AR', mutat directionem CR in CR' poſt evaneſcentiam, & tranſitum per nihilum; ſi autem nexus exprimatur per M1 N1 N4 M4, remanet RP1 poſt appulſum ad infinitum directionis ejuſdem in R'P4, qui nexus ſi exprimatur per M1 N1 N5 M5, illa RP1 poſt abſceſſum in infinitum mutat directionem in RP5, niſi forte ipſi RP1 in eo caſu reſpondeat, non R'P5 negativa, quam communiter Geometræ, & ſemper Analyſtæ aſſumunt pro analoga illi RP1,

ſed alia poſitiva per infinitum traducta juxta num. 62, nimirum R'G' ∞ FP5, qua de re, ut & de omnibus hiſce appulſibus ad nihilum, & ad infinitum, ac tranſitu e poſitivo in negativum multo pluribus egimus in toties memorata diſſertatione noſtra Conicorum Elementis adjecta. Illud unum hic notandum interea, ubi e poſitivo tranſitur ad negativum, licet magnitudo poſt decrementum ex parte poſitiva incipiat ex parte negativa iterum creſcere, revera in Geometrica, & analytica conſideratione pergere decrementum ipſius, cum negativa quantitas eo cenſeatur minor, quo, ſi poſitive conſideretur, ſit major; nam negativa, ut debitum, continua detractione, ut novis impenſis factis, ob id ipſum quod decreſcant, & infra nihilum deprimi pergant, videntur quodammodo augeri.

113. Quandoque dum altera quantitas perpetuo variatur, altera etiam alicubi abrumpitur, & abit in impoſſibilem. Sic in fig. 22 abeunte R2 in R3, ubi RO contingit arcum in E, tum tranſgreſſo illo abit in R4, jam recta RO' nuſquam occurrit circulo, & ordinata ad abſciſſam AR4, vel BR4 pertinens jam impoſſibilis evaſit, quo caſu ea appellari ſolet quantitas imaginaria. Sed is caſus nuſquam in Geometria poteſt accidere, niſi binæ fuerint ordinatæ, & binæ ſimul impoſſibiles evadant. Id & in Algebra dudum notatum eſt, ac demonſtratum; radices nimirum imaginarias æquationum non niſi numero pari haberi poſſe; in Geometria autem manifeſto evincitur ex ipſa natura linearum continuarum, & nuſquam abruptarum. Neque enim poteſt ordinata quæpiam R2P2 delata ad R3E abire in imaginariam, niſi binæ R2P2, R2P'2 ſimul in imaginarias abeant. Cum enim non poſſit arcus P2E abrumpi in E juxta num. 55, ſed continuari debeat, nec ut habeatur imaginarietas continuari poſſit ultra R3E, ſi poſteriores R4O' in eam curvam non incurrunt, debet poſt appulſum ad E progredi, vel regredi per aliquem alium arcum EP2 jacentem citra R3, in quem pariter recta R2P2, antequam deveniat ad R3E, neceſſario incurret alicubi in P'2, & bina puncta P2 P'2 coire debebunt in E, binis ordinatis ſimul imaginariis evadentibus, quod itidem accidet ſi E lateat in Infinito, cum etiam ex ipſo Infinito arcus redire debeat. Sic in fig. 16 motu continuo puncti R per V in VR' ſi nexus exprimatur per curvam MVN1, vel MVN2, abeunt in imaginarias binæ ſimul RP', RP1, vel RP', RP2 in ipſo earum appulſu ad nihilum: at in fig. 15 ſi nexus exprimatur per N1M1M2V2, vel N1M1M3N3, evadunt imaginariæ binæ ſimul ordinatæ RP1, RP2, vel RP1, RP3 in ipſo earum appulſu ad Infinitum, quæ in fig. 22 abierant in imaginarias ipſo appulſu ad finitam quantitatem R3E.

114. De iis etiam, quæ ad hunc velut interitum quantitatis abeuntis in imaginariam diximus in illa ipſa diſſertatione, & iterum dicemus

Digitized by Google

mus infra, hic illud unum monebimus, id omnino contingere non poſſe, ubi ſingulis abſciſſis ſingulæ tantummodo ordinatæ reſpondent, ut accidit in recta linea, in Hyperbolis, & Parabolis omnibus, in quibus eſt aliqua potentia ordinatæ impar, directè, vel reciprocè, ut quævis potentia impar abſciſſæ, ac in infinitis aliis curvarum generibus, quæ definiuntur per æquationes quaſcunque, in quibus ordinata ad unicam cujuſvis imparis gradus potentiam aſſurgit, utcumque commixta ſit cum potentiis abſciſſæ quibuſcunque. In eo autem curvarum genere, quæ plures ordinatas eidem abſciſſæ reſpondentes habere non poſſunt, hunc tranſitum e ſtatu reali in imaginarium haberi non poſſe monuimus idcirco, quod ubi quantitates variabiles referuntur ad tempus, ille caſus obtinet, in quo ſingulis momentis temporis, ſingulæ reſpondent magnitudines quantitatis, non binæ ſimul, nimirum ſingulis abſciſſis ſingulæ ordinatæ, non plures.

115. Hiſce omnibus aliquanto fuſius expoſitis, exponemus jam, quid ſint illæ intermediæ quantitates, per quas tranſire debeat. Plurimi autem ſunt caſus orti ex eo, quod binæ magnitudines extremæ poſſunt eſſe vel directionis ejuſdem, vel contrariæ, ac in utroque ex iis caſibus poteſt deveniri in Geometria a prima ad ſecundam vel ſine receſſu in infinitum, vel cum eo, ipſe autem receſſus poteſt fieri ad partem utramlibet, & ad utramvis partem fiat, fieri poteſt vel cum regreſſu ex eadem Infiniti parte, vel cum tranſitu ad partes oppoſitas. Rurſus haberi idem poteſt tam ſecundum directionem, quam habent ordinatæ, quam ſecundum eam, quam habent abſciſſæ, & ſecundum aliam quamcumque, atque id tam per crura Parabolica, quam per Hyperbolica, vel etiam ſpiralia, vel ſerpentia, & flexuoſa. Plurimæ ſunt eorum caſuum claſſes, quæ variant acceptionem magnitudinum intermediarum inter binas extremas datas.

116. Simpliciſſimus caſus eſt, in quo non fiat receſſus in Infinitum, & is habet locum in Natura, in qua nihil actu infinitum eſſe poteſt: reliqui ad Geometricam contemplationem pertinent tantummodo; ac in eo caſu ſi ambæ extremæ ſint ejuſdem directionis, intermediæ omnes ſunt eæ, quæ eandem directionem habent, & ſunt minores majore ex iis, majores minore; ſi vero extremæ habeant directiones oppoſitas, intermediæ ſunt omnes minores utravis in ſua directione, quo caſu debet etiam haberi tranſitus per nihilum: reliqui caſus alii aliam intermediarum, per quas in motu continuo tranſiri neceſſe eſt, acceptionem habent. Sint in fig. 23 binæ ordinatæ ejuſdem directionis CD, QE, relatæ ad abſciſſas AC, AQ, vel directionis contrariæ C'D, Q'E relatæ ad A'C', A'Q'. Linea continua, quæ nexum exhibet inter quantitates iis abſciſſis, & ordinatis expreſſas, debet a puncto D abire ad punctum E, idque vel ſine receſſu in

 in-

infinitum per aliquam viam formæ cujuſcumque DTT'E, vel cum receſſu in infinitum, qui ſi fiat in directione eadem, quam habent ordinatæ, & per crura aſympototicа, haberi poteſt vel per DME, vel per D M ∞ M' E, vel per DM'E, vel per D M'∞ M E, ut alios aliarum directionum, & aliorum crurum caſus omittamus. Per puncta D, & E concipiantur rectæ NO, KL parallelæ axi AB, vel A'B', quarum prior ordinatæ QE occurrat in S. Tum in ipſa EQ utrinque in infinitum producta, ſumatur punctum H utcumque, vel extra binas KL, NO ad partes E in H1, vel inter KL, & A'B' in H2, vel inter A'B', & NO in H3, vel iterum extra illas binas, ſed inter NO, & AB in H4, vel etiam ultra AB in H5, ac per quodvis punctum H ſit ſua recta FG parallela ipſi axi, & illis binis rectis. Patet omnino, in caſu, in quo linea DTT'E in infinitum recedit, quoſcumque faciat gyros, vel flexus, eam alicubi debere ſaltem ſemel tranſcurrere quamcumque rectam incluſam binis illis KL, NO, ut quamcumque F2G2 in P2, vel F3 G3 in P3. Ducta autem ex ipſo P, ut ex P2 recta PR perpendiculari ad axem, abſciſſæ AR reſpondebit ordinata RP2, ſive QH2. Porro ſi axis ſit AB, & binæ ordinatæ ejuſdem directionis, patet inde alicubi debere haberi ordinatam æqualem cuicumque QH2, vel QH3 minorem majore e binis illis extremis nimirum QE, & majorem minore CD, vel QH3. Quod ſi axis ſit A'B' interiacens binis NO, KL, ut binæ extremæ Q'E, C'D' ſive Q'S oppoſitas directiones habeant, debebunt haberi omnes QH2 minores Q'E, & omnes QH3 minores itidem Q'S, ſive CD, ac puncto H abeunte in Q', patet debere ordinatam evaneſcere, & per nihilum motu continuo tranſire e poſitiva ad negativam.

117. Si vero linea continua nexum exhibens abeat per D M'∞ - ME, quod in Hyperbola conica accideret, poſſent, immo in ea debent, remanere immunes omnes illæ F2G2, F3G3 incluſæ binis KL, NO, adeoque nulla haberi ex intermediis in præcedente ſenſu acceptis, ſed neceſſario debent ſecari omnes jacentes utrinque extra illos limites, ut F1G1, F4G4, F5G5: adeoque haberi reliquæ omnes utriuslibet directionis, quæ in præcedenti caſu non includebantur. In reliquis autem tam hiſce caſibus, quam aliis hic non expreſſis, receſſuum in infinitum, ac regreſſuum, ex ipſius figuræ contemplatione patebit facile, quæ pro ſingulis intermediæ illæ ſint, per quas tranſiri debet.

118. Omiſſis hiſce caſibus, quæ Infinitum includunt, adeoque ad Naturam pertinere non poſſunt, patet, in priore caſu poſſe abſciſſam ipſam AR initio & recedere ab abſciſſa A.. ut figura exhibet, & accedere, quod accideret, ſi linea nexum exhibens non recederet a recta QE, & vel ipſa recedat, vel accedat, poſſe ordinatam RP initio vel recedere ab ordinata QE, vel ad eam accedere, cum linea illa poſſit

vel

Digitized by Google

vel accedere ad axem, vel ab eo recedere, & iidem caſus haberi poſſunt in fine, iidem reſpectu & axis A'B', & abſciſſæ A'R', ac ordinatæ R'M'; ſed in omnibus ejuſmodi caſibus patet, ſalva continuitate lineæ nexum exhibentis, non poſſe in toto ejus lineæ excurſu non haberi quamcumque ex illis ordinatis intermediis in ſenſu expoſito, nec fieri poſſe, ut ubi ex D exit illa linea, vel in E deſinit, punctum H per omnes diſtantias SH3 utcumque parvas non recedat a puncto S, vel punctum H2 non accedat ad punctum E per diſtantias H2E utcumque parvas. Quare patet ordinatam, dum ad utramlibet e binis datis QE, CD accedit, motu facto ex D ad E, vel ex E ad D, non poſſe non accedere ad illas per quaſcumque magnitudines utcumque proximas ipſis, atque id generale eſſe magnitudinibus quibuſcumque utcumque inter ſe proximis, vel remotis quantitatum, quarum nexus per lineam continuam exprimitur, in quo ſita eſt continuitatis lex, quam etiam clarius explicabimus exemplo quantitatum, quæ referuntur ad tempus, quod motu continuo fluit, nunquam recto regrediens, & quod binas ejuſdem quantitatis magnitudines pro eodem momento non admittit. Ac ut Maupertuiſiii difficultatem diſſolvamus tandem, & oſtendamus, quo pacto ſaltus omnis a continuitatis lege excludatur utcumque exiguus, conſiderabimus caſum ſimpliciſſimum, in quo a poſitiva quantitate ad aliam poſitivam majorem continuo incremento aſcenditur, vel minorem continuo decremento deſcenditur.

119. Sint igitur in fig.24 binæ magnitudines quantitatis ejuſdem CD, QE, reſpondentes binis momentis C, Q, & ambæ directionis ejuſdem, a quarum prima minore ad ſecundam majorem ea quantitas tranſire debeat tempore continuo CQ, ſervata Continuitatis lege. Debet eo tempore habere omnes magnitudines majores, quam ſit CD, ſive QS, & minores quam QE ita, ut non ſolum dato quovis momento R habeatur magnitudo RP ipſi reſpondens, ſed etiam data quacumque magnitudine, ut QH, in illo ſenſu intermedia inter QS, & QE, habeatur momentum ipſi reſpondens. Id autem momentum, data linea DE, ſive recta, ſive curva, quæ exhibeat ejus magnitudinis creſcentis legem, ſemper invenietur ſaltem unum. Ducta enim per H recta FG indefinite parallela AB, ea neceſſario incurret in illam lineam DE alicubi in P ſaltem ſemel, ut figura exhibet; poſſet autem etiam in plurimis punctis ipſi occurrere, ſi nimirum illa linea ſinuaretur hinc, & inde circa rectam ipſam FG, quod fieri non poterit, ſi quantitas, ut ſuppoſuimus continuo creſcat. Ducta PR parallela DC, vel EQ, habebitur momentum R, cui illa magnitudo reſpondebit.

120. Hoc ubi generaliter habeatur, habebitur tranſitus per omnes magnitudines intermedias, & incrementum per omnes gradus infini-

finite parvos ſine ullo ſaltu utcumque exiguo. Id facile intelligetur, ſi rite concipiatur, quid ſit gradus adveniens, & quo pacto adveniat. Singulis momentis temporis R, T, O reſpondent ſingulæ magnitudines, ut RP, TV, OL. Utcumque igitur deſumantur bina momenta determinata, ſemper habebuntur binæ magnitudines iis reſpondentes, quæ inter ſe different, ut illa momenta inter ſe diſtant: Diſtantia momentorum determinate aſſumptorum determinata ſemper erit, & finita, ac pariter differentia magnitudinum iis reſpondentium. Ea differentia, & gradus, qui accedit magnitudini illo tempore continuo, debetur intervallo quod inter illa bina momenta intercedit. Si rectæ parallelæ AB ductæ ex D, P, V, L occurrant rectis RP, TV, OL, QE in I, K, M, N, gradus advenientes magnitudini CD temporibus CR, RT, TO, OQ erunt IP, KV, ML, NE. Si ea tempora determinata ſint, & proinde finita, ii etiam gradus determinati erunt, & finiti. Quoniam autem temporis particulæ decreſcere poſſunt in infinitum, ſi eæ ſumantur minores perpetuo, ac minores, etiam differentiæ illæ, ſeu gradus minores itidem, & minores evadent, ac ſi illa tempuſcula conſiderentur indefinita, ut decreſcentia ultra quoſcumque limites in infinitum, in quo ſtat per nos, quod ſint infinite, ſeu indefinite parva, etiam illæ differentiæ, illi gradus decreſcent indefinite ultra quoſcumcumque limites, eruntque in eodem ſenſu infinite, vel indefinite parvi, ac demum evaneſcent.

121. En autem, in quo ſtet excluſio ſaltus. Ille gradus quicumque, utcumque parvus, ubi ſervatur continuitas, non advenit momento aliquo temporis totus ſimul, ſed advenit tempore quodam continuo ita, ut ejus partes minores ſenſim, ac minores reſpondeant partibus temporis minoribus ſenſim, ac minoribus, nec ulla ſit utcumque exigua pars illius gradus, quæ aliquo itidem exiguo tempore non adveniat. Illa ipſa pars poteſt dici gradus, & ſi tranſitus fiat per omnes gradus infiniteſimos, nimirum, qui aſſumi poſſint utcumque indefinite, patet, cujuſcumque magnitudinis a zero ad magnitudinem quamvis finitam, jam haberi tranſitum per omnes intermedias magnitudines, & Bernoullii definitio conveniet cum noſtra. Quæ de incrementis diximus facile ad decrementa transferuntur, in quibus Continuitatis lex habetur, ſi decrementorum gradus non momentis temporis habeantur, ſed tempuſculis continuis ita, ut partes decrementi quæcumque, utcumque parvæ, ſuas habeant temporum partes itidem exiguas.

122. Saltus haberetur, ſi tota differentia inter binas magnitudines, utcumquque exigua, adveniret non tempore continuo, ſed momento temporis. Si nimirum toto tempore CR duraret ſemper magnitudo æqualis CD, vel RI, tum momento R adveniret totus ſimul gradus

gradus IP, ac per totum tempus RT daretur magnitudo RP, vel TK & momento T adveniret totus gradus KV, & ita porro. Eo caſu non linea continua DPVLE, ſed ſcala quædam DIPKVMLNE legem mutationis exhiberet, quia immo eam exhiberent ſolæ rectæ DI, PK, VM, LN abruptæ, & ſaltus haberetur, qui Continuitati æque officeret, ac ſi totus Mundus momento temporis interiret: nam magna, & parva reſpectiva ſunt juxta ea, quæ diximus num. 21, non abſoluta, & ſi res eo pacto fieret, vim haberet Maupertuiſii difficultas. Verum incrementum illud IP non advenit momento R totum, ſed pars I'P' ipſius IP utcumque parva advenit parte CR' tempuſculi CR itidem parvi, quo pacto nullus uſpiam habetur ſaltus, qui ſecum trahit momentaneum tranſitum ab una magnitudine ad aliam, quæ ab ea differat differentia aliqua in ſe determinata, utcumque parva.

123. Quare patet ex iiſdem prorſus principiis a continui natura derivatis hanc Maupertuiſii difficultatem evidenter ſolvi, ex quibus illa de motu Achillis, & teſtudinis ſoluta eſt ſuperius. Ut nimirum ex eo, quod nullum momentum, aut punctum eſt contiguum alteri momento, ſed inter bina quævis momenta, aut puncta, quæ non congruant, tempus continuum, vel lineola interjacet, quæ dividi poteſt in infinitum, aut minui acceſſu momenti ad momentum, vel puncti ad punctum, ſoluta eſt difficultas illa de motu continuo; ita hæc ſolvitur ex eo, quod ſingulis momentis ſingulæ magnitudines reſpondeant, at nulla magnitudo alteri magnitudini ita proxima eſſe poſſit, ut differentia non intercedat, quæ tempori illi non reſpondeat, & imminui non poſſit in infinitum, interjacentibus aliis magnitudinibus intermediis ultra quoſcumque limites propioribus, quæ reſpondeant intermediis momentis, & habeatur quidem prima, & ultima, a qua, & ad quam motu illo continuo fiat tranſitus, quin ſecunda, & penultima habeantur; in tota autem magnitudinum ſerie continua ſemper, ut in quovis continuo, unicus terminus communis ea, quæ præcedunt, cum iis, quæ conſequuntur conjungat; unde, ni fallimur, evidenter conſtat, legem Continuitatis nullam contradictionem involvere, nec inducere ſaltum, dum maxime ipſum ſaltum per intermedios gradus conatur excludere.

124. Explicata hoc pacto, & vindicata ipſa continui natura, & Continuitatis lege, ac ſuſpicione omni impoſſibilitatis amota, tranſeundum jam nobis eſt ad ipſam in Natura ſtabiliendam, quod multo brevius præſtandum erit, producta jam ultra præfinitos limites diſſertatione, plurimis, quæ digniſſima commemoratu eſſent, ægerrimo ſane animo, prætermiſſis, aliis, quæ prætermitti nullo modo poſſunt, vix indicatis.

125. Le-

125. Legem Continuitatis in natura Leibnitiani conantur evincere ex Principio illo, quod *Rationis ſufficientis* appellant, quod nimirum nulla eſſet ratio ſufficiens, cur ſemel admiſſo ſaltu, tantus determinate ſaltus fieri deberet, non major, nec minor. *Oporteret*, inquit Bernoullius in diſcurſu adducto num. 103, primum ſtatum deſtrui, quin ſciret *natura, ad quem alium ſtatum determinari deberet*, ac eodem fere pacto cæteri Leibnitianorum. Nobis ſane id argumentum, nequaquam arridet, & id principium, ut a Leibnitio, & præcipuis Leibnitianis admittitur, falſum omnino eſſe, ac etiam perniciosum arbitramur, ac præterea, ut olim etiam in Diſſertatione de Maris Æſtu affirmavimus, cenſemus, *nunquam poſſe ulli eſſe uſui ad quidpiam utcunque determinandum, & multo minus ad demonſtrandum*.

126. Haud hic quidem eſt locus longiorem contra hoc ipſum principium diſſertationem inſtituendi; indicabimus tamen ea, quæ nos ad ita ſentiendum impellunt. In primis ſi etiam libera, vel humana, vel Divina voluntas debeat omnino rationem habere, cur id potius velit, quam nolit, vel viceverſa, actum eſſe cenſemus de libertate. Poſita enim earum rationum, quæ nobis objiciuntur, & quarum omnium cognitio a noſtro arbitrio omnino non pendet, præponderantia, jam fieri non poteſt, ut ad illud, quod præponderet, voluntas noſtra non inclinetur. In Deo autem in primis libertatem adimi neceſſe eſt, & induci abſolutam neceſſitatem ſingularum rerum, quæ exiſtunt, & impoſſibilitatem eorum, quæ non exiſtunt. Fieri enim omnino non potuit, ut Deus rationes omnes, quæ adeſſe poterant, pro hoc individuo rerum ordine creando non videret; fieri non potuit, ut eæ, quæ aderant non adeſſent; fieri non potuit, ut eæ, quæ præponderarunt, non præponderarent: ſuam enim naturam mutare non poſſunt; fieri non potuit, ut Deus præponderantiam non ſequeretur. Igitur etiam ex contradictionis principio innixo Divinæ naturæ prædita ſapientia, & determinatione ad optimum eligendum, & naturæ rationum, quas videre potuit, eruitur, fieri non potuiſſe, ut hic ipſe ordo ſolus non exiſteret, qui idcirco omnino neceſſarius fuit, & ridicula eſt ſane eorum poſſibilitas, quæ exiſtere non poterant, niſi crearentur, creari non poterant, niſi ratio ſufficiens Deum ad creationem moveret, nec ipſa ratio ſufficiens ulla eſſe poterat, præter illas, quas ipſe Deus ob oculos habuit, cum Mundum crearet.

127. Accedit ad admittendam liberam Dei voluntatem & illud, quod ubi de poſſibilibus agitur, nulla bonitas creata eſt poſſibilis, qua major aliqua poſsibilis non ſit, ut in diſtantiis, ac in aliis ejuſmodi accidit, ſed quavis perfectione finita alia major haberi poteſt. Nulla autem creata perfectio infinita abſolute eſſe poteſt, ut de quantitate demonſtravimus ſupra. Quare Deus, ubi aliquid condendum decrevit

vit neceſſario debuit creare aliquid, quo alia perfectiora increata relinqueret, nec omnino potuit ab optimi electione moveri ad ea condenda, quæ condidit. Præterea quævis utcumque magna creaturarum naturalis perfectio, ita eſt exigua, immo ita nihil reſpectu Divinæ immenſitatis, ut exercitium libertatis ipſius infinities majoris pretii ſit, quam ejuſmodi bonitas quæcumque, & reſpectu ipſius omnia pro æqualibus habenda ſint. Debet igitur haberi ratio, cur aliquid potius ſit, quam non ſit, ſed ratio phyſica in creatis habebitur ſemper, nimirum cauſa aliqua, ratio moralis non ſemper aderit, & poterit haberi illud, *ſtat pro ratione voluntas*.

128. Hæc de falſitate principii, prout a Leibnitio admittititur, & prout ab ipſis Leibnitianis ad uſum traducitur, qui ipſo in contingentibus potiſſimum ſunt uſi ab humana, vel Divina electione pendentibus. Nemo negat omnium effectuum ſuas debere eſſe cauſſas, omnium concluſionum ſuas præmiſſas, quibus evidentes reddantur, quas cum videris, effectum inferas, concluſioni aſſentiaris, quas inveſtigare debeas, ut iis ſemel agnitis, alia etiam inde neceſſario conſequentia inferre poſsis. At negativi Leibnitianorum principii uſus non in eo eſt poſitus; ſed tota ejus vis, quam quotidie ipſi Leibnitiani obtrudunt, in eo ſita eſt, ut ex rationis defectu, rem, inferas, nequaquam exiſtere. Porro quam habere ad aliquid *determinandum*, vel *demonſtrandum* vim poteſt rationis defectus, ſi nobis compertum non ſit, nullam rationem haberi reipſa? At ſi libera Conditoris determinatio poteſt eſſe ratio, cur aliquid potius ſit, quam non ſit; nobis omnes rationes innoteſcere omnino non poſſunt, cum libera determinatio Conditoris non alio pacto nobis innoteſcat, niſi quadam veluti attentatione per inductionem eorum, quæ conſtanter fiunt, & quorum conſtantem quandam legem ab eo eſſe latam cenſemus, quæ inductio, quam manca ſemper ſit, & quantum ea illatio a demonſtrationis evidentia diſtet, nemo non videt.

129. At eo etiam prætermiſſo, an non Leibnitius ipſe profitetur, multa mala, ut illud Tarquinii flagitium, in Mundo etiam perfectiſsimo reperiri, cum omnes poſsibiles aliquid mali admixtum habeant, & id in optimo illo tolerari debeat ad tot alia habenda bona? At ubi in aliqua diſquiſitione invenerimus etiam, ſi fieri poteſt, quid ibi eo ſolo conſiderato optimum, quid ſimpliciſsimum ſit, & minimi diſpendii eſſet; unde nobis conſtabit, eam non eſſe Mundi particulam, quæ licet imperfectior, in aliorum gratiam, ut permiſsio Tarquiniani flagitii, ſelecta ſit? Quod ſi ita eſſet, quid ex ratione ſufficienti etiam pro ſingulis caſibus cognita inferri unquam poterit, cum viſa etiam prefectione majore, admiſſa neceſsitate ad optimum, adhuc in tanta noſtrarum cognitionum tenuitate, nihil inde determinate conſequatur.

H 130. Quid

Digitized by Google

130. Quid vero etiam, ubi de neceſſariis agitur rerum cauſſis? Licet ſemper cognita neceſſaria cauſſa effectum tuto inferre poſsis, quo te erroris periculo exponas, ſi a defectu cauſſæ, quarum tam paucas noſti, defectum ipſius effectus audacter deducas? Obtruditur quotidie a Leibnitiaris exemplum Archimedis, qui a defectu rationis ſufficientis æquilibrium in æquiponderantibus deduxit, ſiletur ipſius error ortus ex eodem prorſus principio, cum ex eodem rationis defectu, ſtabilito æquilibrio, intulit ſphæricam Telluris formam, quam a ſphærica forma abludere nobis conſtat, atque id ipſum ob rationes ſero detectas, quas Archimedes cum non videret, habuit pro nullis. Quamquam æquilibrium illud ipſum non a negativo principio, ſed argumento, quod ad poſitivam formam, & vim facile reducitur, Archimedi profluxit, ut facile oſtenderemus, ſi per tempus liceret. Illud unum addimus: inter alia plurima, in quibus argumentum a ratione ſufficiente petitum omni robore deſtituitur, hanc ipſam eſſe excluſionem ſaltus e Natura. Quid enim vetat eſſe rationes aliquas, ob quas determinatæ magnitudinis ſaltus utiliſsimus præ ceteris omnibus eſſe poſsit, ut hominibus ſuperiora tabulata ſcandentibus determinatæ cujuſdam altitudinis gradus omnium maxime utiles ſint?

131. Ea igitur ratione omiſſa, binas proferemus alteram ex metaphyſicis principiis, alteram ex inductione, quæ in Phyſicis potiſſimum ſummi ubique uſus eſſe debet, cum cauſſas ſaltem primas, vel ſemper, vel fere ſemper ignorari a nobis neceſſe ſit Naturam ſola, ſatis illa quidem tenui, noſtrorum ſenſuum ope inveſtigantibus. Prima ratio eſt hujuſmodi. In quantitatibus, quæ variari poſſunt, & continuo tempore durant, nec unico momento plures magnitudines habere poſſunt, ſaltus, ſive momentaneus tranſitus ab una magnitudine ad aliam, prætermiſsis omnibus intermediis, omnino haberi non poteſt. Hæc propoſitio ſi evincatur, evincetur ſaltum in natura haberi non poſſe. Nam quævis quantitas ſingulis momentis unicam tantummodo magnitudinem juxta Naturæ leges habere poteſt. Sic corpus licet denſitatem, & velocitatem (intelligimus autem illam ſemper, quæ ex omnibus componitur, & motum ipſum, qui fit, determinat) mutare poſsit, ſingulis tamen momentis ſingulas tantummodo habere poteſt. Poſſet quidem duas habere denſitates, ſi replicaretur ita, ut ejus puncta in una ſpatii parte unam a ſe invicem diſtantiam haberent, aliam in alia. Poſſet duas velocitates habere in eodem momento, ſi haberet determinationem percurrendi dato tempore & majus, & minus ſpatium, adeoque replicandi ſe omnibus ſequentibus momentis, quæ Naturæ legibus repugnant, & per ſolam Divinam omnipotentiam præſtari poſſunt.

132. At

Digitized by Google

132. At ea propoſitio noſtro quidem judicio manifeſto evincitur ex iis, quæ ſupra expoſuimus. Si enim aliquo momento temporis haberetur ſaltus, eodem illa quantitas binas magnitudines habere deberet, nimirum poſtremam ſeriei continuæ pertinentis ad tempus præcedens, & primam ſeriei pertinentis ad tempus conſequens. Ut enim illud idem momentum & eſt poſtremum temporis præcedentis, & primum ſequentis, ita magnitudo, quæ habetur illo momento debet eſſe & poſtremus terminus ſeriei reſpondentis tempori præcedenti, & primus ſeriei conſequenti tempori reſpondentis. Series enim continua præcedens, debet habere ſuum poſtremum terminum, & ſeries conſequens primum, qui ſolus ab ea auferri non poteſt, quemadmodum ſolum ultimum punctum a linea, ſola ultima linea a ſuperficie auferri omnino non poteſt. Si toto tempore CR in fig.24. habetur magnitudo æqualis RI, & toto tempore RT magnitudo æqualis RP, momento R debet haberi utraque, cum fieri non poſsit, ut areæ RIDC deſit ſola linea ultima RI, vel rectangulo RPKT ſola prima RP. Id ipſum manifeſto evincitur ex iis, quæ diximus num.97 de loco geometrico, qui plures ordinatas habere non poſsit uni abſciſſæ reſpondentes, qui continuitatem omnino ſervare debet. Lineæ DC, EF in fig.19, ſi abrumpuntur, hiatum debent relinquere in GH, in quo ordinata non ſolum nulla, ſed impoſsibilis ſit, vel in H ordinatas habere binas in fig.20, vel binas habere toto tractu HG in fig.21, nec ullus alius eſt caſus præter illos tres, cum, ut num.99 monuimus, ad ſecundum reducatur caſus etiam is, in quo poſt G dicatur ordinata evaneſcere, congruente EF cum axe GB, in quo caſu momento G haberetur magnituuo GC, & magnitudo nulla, ut diſtantia ex. gr. GC, & diſtantia nulla, puncto altero replicato, & exiſtente tam in diſtantia GC, quam in eodem ſpatii puncto cum altero puncto.

133. Eodem argumento excluditur etiam ſaltus in motu locali. A puncto quovis ad aliud quodvis punctum ſpatii poteſt ire mobile quodpiam viis admodum diverſis, utcumque ſinuatis, & incurvatis; ſed linea, per quam abibit, continuo ductu deſcribenda erit ſemper ſine hiatu ullo. Cur id? Quia nimirum ſi alicubi abrumperetur, ut in fig.1, & via eſſet ABCD interrupta in BC, vel momentum, quo inciperet deſcribere CD, eſſet idem, ac momentum, quo deſineret eſſe in AB, vel ipſum præcederet, vel ſequeretur. In utroque ex his poſtremis caſibus inter illa bina momenta neceſſario interjacere debet tempus continuum, in quo infinita momenta ſunt. Porro in primo ex tribus propoſitis caſibus eſſet eodem momento temporis, tam in B, quam in C: adeoque [illegible]icaretur, in ſecundo per tempus continuum eſſet in binis lineis, & proinde [illegible]icaretur infinitis momentis, in tertio per tempus continuum nuſquam eſſet. Tota vis argumen-

gumenti ſita eſt ſemper in excluſione momenti momento proximi, puncti proximi puncto, lineæ aliam habentis lineam proximam, adeoque, & termini cujuſcumque ſeriei tempore durantis continuo, vel per lineam continuam traductæ, proximi termino.

134. Sed jam hoc ipſo argumento viam nobis ſtravimus ad inductionem, ad quam, & Leibnitius ipſe, & Leibnitiani provocarunt, & quam habere poſſumus ſatis amplam, cum hæc ipſa excluſio ſaltus in motu locali ad inductionem etiam pertineat. Sed pauca quædam de inductione ipſa præmittemus. In primis ubi generales Naturæ leges inveſtigantur, inductio vim habet maximam, & ad earum inventionem vix alia ulla ſupereſt via. Ejus ope extenſionem, figurabilitatem, mobilitatem, impenetrabilitatem corporibus omnibus tribuerunt ſemper Philoſophi etiam Veteres, quibus eodem argumento inertiam, & Generalem gravitatem plerique e Recentioribus addunt. Inductio, ut demonſtrationis vim habeat, debet omnes ſingulares caſus, quicumque haberi poſſunt percurrere. Ea in Naturæ legibus ſtabiliendis locum habere non poteſt. Habet locum laxior quædam inductio, quæ, ut adhiberi poſſit, debet eſſe ejuſmodi, ut in primis in omnibus iis caſibus, qui ad trutinam ita revocari poſſunt, ut deprehendi debeat, an ea lex obſervetur, eadem in iis omnibus inveniatur, & ii non exiguo numero ſint; in reliquis vero ſi quid prima fronte contrarium videatur, re accuratius perſpecta, cum illa lege poſſint omnia conciliari, licet, an eo potiſſimum pacto concilientur, immediate innoteſcere nequaquam poſſit. Si eæ conditiones habeantur, inductio ad legem ſtabiliendam cenſeri debet idonea. Sic quia videmus corpora tam multa, quæ habemus præ manibus, aliis corporibus reſiſtere, ne in eorum locnm adveniant, & loco cedere ſi reſiſtendo ſint imparia, potius, quam eodem perſtare ſimul, impenetrabilitatem corporum admittimus, nec obeſt, quod quædam corpora videamus intra alia licet duriſſima inſinuari, ut oleum in marmora, lumen in chryſtalla, & gemmas. Videmus enim hoc phœnomenum facile conciliari cum ipſa impenetrabilitate, dicendo per vacuos corporum poros ea corpora permeare.

135. Præterea, quæcumque proprietates abſolutæ, nimirum, quæ relationem non habeant ad noſtros ſenſus, deteguntur generaliter in maſſis ſenſibilibus corporum, eaſdem ad quaſcumque utcumque exiguas particulas debemus transferre niſi poſitiva aliqua ratio obſtet, & niſi ſint ejuſmodi, quæ pendeant a ratione totius, ſeu multitudinis, contradiſtincta a ratione partis. Primum evincitur ex eo, quod magna, & parva ſunt reſpectiva, & a nobis parva, ac inſenſibilia dicuntur ea, quæ reſpectu noſtræ molis, & noſtrorum ſenſuum ſunt exigua. Quare ubi agitur de proprietatibus abſolutis non reſpectivis, quæ-

quæcumque communia videmus in iis, quæ intra limites continentur nobis ſenſibiles, ea debemus cenſere communia etiam infra eos limites: nam ii limites reſpectu rerum, ut ſunt in ſe, ſunt accidentales, adeoque ſiqua fuiſſet analogiæ læſio, poterat illa multo facilius cadere intra limites nobis ſenſibiles, qui tanto laxiores ſunt, quam infra eos, adeo nimirum propinquos nihilo. Quod nulla ceciderit, indicio eſt, nullam eſſe. Id indicium non eſt evidens, ſed ad inveſtigationis principia pertinet, quæ ſi juxta quaſdam prudentes regulas fiat, ſucceſſum habere ſolet. Cum id indicium fallere poſſit, fieri poteſt, ut committatur error, ſed contra ipſum errorem habebitur præſumptio, ut etiam in jure appellant, donec poſitiva ratione evincatur oppoſitum. Hinc addendum fuit, *niſi ratio poſitiva obſtet*. Sic contra haſce regulas peccaret, qui diceret, corpora quidem magna compenetrari, ac replicari, & inertia carere non poſſe, compenetrari tamen poſſe, vel replicari, vel ſine inertia eſſe exiguas eorum partes. At ſi proprietas ſit reſpectiva reſpectu noſtrorum ſenſuum, ex eo, quod habeatur in majoribus maſſis, non debemus inferre, eam haberi in particulis minoribus, ut eſt hoc ipſum, eſſe ſenſibile, ut eſt, eſſe coloratas, quod ipſis majoribus maſsis competit, minoribus non competit, cum ejuſmodi magnitudinis diſcrimen accidentale reſpectu materiæ, non ſit accidentale reſpectu ejus denominationis *ſenſibile*, *coloratum*. Sic etiam ſiqua proprietas ita pendet a ratione aggregati, vel totius, ut ab ea ſeparari non poſsit, nec ea, ob rationem nimirum eandem, a toto, vel aggregato debet transferri ad partes. Eſt de ratione totius, ut partes habeat, nec totum ſine partibus haberi poteſt. Eſt de ratione figurabilis, & extenſi, ut habeat aliquid, quod ab alio diſtet, adeoque, ut habeat partes; hinc eæ proprietates licet in quovis aggregato particularum materiæ, ſive in quavis ſenſibili maſſa inveniantur, non debent inductionis vi transferri ad particulas quaſcumque.

136. Expoſita hoc pacto vi principii inductionis, quo in naturam fere uno poſſumus cum ſpe ſucceſſus inquirere, & ex quo uno pendent, quæcumque facultates obſervationibus innituntur, Medicina, Anatomia, Optica, Aſtronomia, ac aliæ plurimæ, ad ipſam inductionem pro lege continuitatis demonſtrandam faciemus gradum. Plurima ſane afferri poſſent exempla manifeſtiſsima; ſed quædam pauca tantummodo attingemus, illud addendo, quod multo magis vim ipſam inductionis oſtendet, nihil uſpiam in quantitatum variabilium mutationibus reperiri, licet tam multa quantitatum variabilium genera quotidie obverſentur oculis, quod vel continuitatis legem non per ſeſe, ſponte, ac evidenter exhibeat, vel cum ipſa continuitatis lege diligentius conſiderata optime componi non poſsit.

137. In

Digitized by Google

137. In primis ampliſsima eſt, inductio ſpatii, ac temporis, in quibus, motu continuo, & ſine ullo ſaltu, perpetuo pergitur, tum eorum, quæ in ſpatio ſunt, ut linearum omnium, ac ſuperficierum in Geometria, quæ ſi eandem naturam ſervent, omnes affectiones ſuas ita continuo mutant, ut Geometris eſt notiſsimum, ut ab una magnitudioe ad aliam per omnes intermedias omnino tranſeant. Ab una ordinata ad aliam, ab una areæ, vel arcus magnitudine ad aliam, ab una directione ad aliam, tranſitur ſemper per intermedias omnes, etiam a curvatura, quæ habetur in quovis puncto, ad curvaturam, quæ habetur in alio, quæ quidem curvaturæ pendent a radiis circulorum oſculatorum, quibus cenſentur reciproce proportionales, & a quavis affectione ad aliam ita ſemper tranſitur, ut mutationes continuæ fiant per intermedias magnitudines quaſcumque; ac ſi a poſitivis ad negativas fiat tranſitus, ſemper vel per nihilum tranſitur, vel per infinitum. Idem in Locorum Geometricorum transformationibus, ortis ex mutatione conditionis cujuſpiam ita ubique obſervatur ſanctiſsime, ut ad infiniti myſteria, ubi opus, eſt Geometria recurrat potius, quam certum ſaltum admittat, qnemadmodum in hac ipſa diſſertatione vidimus in tam multis exemplis, ac multo plura habentur in diſſertatione illa tomi tertii, & multo adhuc plura quarto noſtrorum Elementorum tomo reſervamus. Illud ſane in univerſa Geometria, quin immo illud & in indefinitis Algebræ formulis ſimplices Geometricos exprimentibus locos ubique ſanctiſsime obſervatur, in quibus nuſquam, ubi de finitis quantitatibus agitur, ſaltus habetur ullus, nuſquam ne infinitis quidem, qui per quædam Infiniti myſteria utcumque non evitetur. Nec in ſolis imaginariis lineis, quæ in ſpatio ſunt habetur ejuſmodi continuitas, verum etiam in realibus corporum motibus, qui a ſpatio pendent, & tempore. In iis omnibus videre eſt in primis illud, nunquam, ut diximus num. 133, ab uno puncto ſpatii ad aliud deveniri, niſi tranſeundo per lineam continuam, licet ejuſmodi continuæ lineæ tam multæ eſſe poſsint, & tam variæ inter ſe. Inde autem conſequitur in diſtantiis itidem mutandis continuitatem ſervari, nullo tranſitu unquam facto ab una ad aliam diſtantiam ſine tranſitu per intermedias, & hinc nullam denſitatem, quæ a diſtantia punctorum pendet, mutari unquam per ſaltum; hinc vero pariter nullam arborem, aut aliam ejuſmodi rem quamcumque, quæ creſcit per receſſum verticis a fundo, unquam ab una altitudine ad aliam devenire ſine tranſitu per intermedias.

138. Quin immo in motibus ipſis continuitas ſervatur etiam in eo, quod motus omnes in lineis continuis fiunt nuſquam abruptis. Plurimos ejuſmodi motus videmus. Planetæ omnes, & Cometæ in lineis con-

continuis curſum peragunt ſuum, & omnes retrogradationes fiunt paullatim, ac in ſtationibus ſemper exiguus quidem motus, ſed tamen habetur ſemper, atque hinc etiam dies paullatim per Auroram venit, per veſpertinum crepuſculum abit, Solis diameter non per ſaltum ſed continuo motu ſupra horizontem aſcendit, vel deſcendit. Gravia itidem oblique projecta in lineis itidem pariter continuis motus exercent ſuos, nimirum in Parabolis ſecluſa aeris reſiſtentia, vel ea conſiderata in orbibus ad Hyperbolas potius accedentibus, & quidem ſemper cum aliqua exigua obliquitate projiciuntur, cum infinities infinitam improbabilitatem habeat motus accuratè verticalis inter infinities infinitas inclinationes licet exiguas, & ſub ſenſum non cadentes, fortuito obveniens, qui quidem motus in Hypotheſi Telluris motæ a Parabolicis plurimum diſtant, & curvam continuam exhibent etiam pro caſu projectionis accuratè verticalis, quo quieſcente penitus Tellure, & nulla ventorum vi deflectente motum, haberetur aſcenſus rectilineus, vel deſcenſus. Immo omnes alii motus a gravitate pendentes, omnes ab elaſticitate, a vi magnetica, continuitatem itidem ſervant, cum eam ſervent vires illæ ipſæ, quibus gignuntur. Nam gravitas cum decreſcat in ratione reciproca duplicata diſtantiarum, & diſtantiæ per ſaltum mutari non poſſint, mutatur per omnes intermedias magnitudines. Videmus pariter vim magneticam a diſtantiis pendere lege continua, vim elaſticam ab inflexione, ut in laminis, vel a diſtantia, ut in particulis aeris compreſſi. In iis, & omnibus ejuſmodi viribus & in motibus, quos gignunt, continuitas habetur ſemper tam in lineis, quæ deſcribuntur, quam in velocitatibus, quæ pariter per omnes intermedias magnitudines mutantur, ut videre eſt in pendulis, in aſcenſu corporum gravium, & in aliis mille ejuſmodi, in quibus mutationes velocitatis fiunt gradatim, nec retro curſus reflectitur, niſi imminuta velocitate per omnes gradus. Ea diligentiſſimè continuitatem ſervant omnia. Hinc nec ulli in naturalibus motibus habentur anguli, ſed ſemper mutatio directionis fit paullatim, nec vero anguli exacti habentur in corporibus ipſis, in quibus utcumque videatur tenuis acies, vel cuſpis, microſcopii ſaltem ope videri ſolet curvatura, quam etiam habent alvei fluviorum ſemper, habent arborum folia, & frondes, ac rami, habent lapides quicumque, niſi forte alicubi cuſpides continuæ occurrant vel primi generis, quas natura videtur affectare in ſpinis, vel ſecundi generis, quas videtur affectare in avium unguibus, & roſtro, in quibus tamen manente in ipſa cuſpide unica tangente continuitatem ſervari videbimus infra. Infinitum eſſet ſingula perſequi, in quibus continuitas in Natura obſervatur. Satius eſt generaliter provocare ad exhi-

exhibendum caſum in Natura, in quo continuitas non ſervetur, qui omnino exhiberi non poterit.

139. In iis quæ ad Geometriam pertinent, objicere ſolent has ipſas, quas poſtremo loco nominavimus, cuſpides, ſeu puncta regreſſuum tanquam ſi continuitas in iis læderetur, cum curva poſteaquam ad certum punctum devenerit, retro curſum reflectat. Leibnitiani reſpondere ſolent, ibi nullum commiti ſaltum, quia cuſpis oritur e nodo ſervante continuitatem, ac ipſius cuſpidis verticem conſiderandum eſſe affirmant, non ut punctum quoddam indiviſibile, ſed ut nodum quemdam infinite parvum, qui curvaturam infinitam habeat, & cum omnibus directionibus in ſe ipſum redeat. In fig. 17 nodus excurrit directione ſemper in eamdem plagam continuata per MOVCFIVPN. In omnibus iis intermediis punctis excurrit & tangens excurſu continuo per QOR, AVB, DCE, GFH, LIK, B'VA', SPΓ. Evaneſcente nodo, abit fig. 17 in 18, & habetur cuſpis MVN, in qua dicunt, punctum V non eſſe punctum mathematicum, ſed nodum quendam infinitè parvum, habentem adhuc eaſdem illas tangentes.

140. At nobis id nullo pacto probari poteſt. Nam punctum illud cuſpidis eſt unicum indiviſibile punctum, & arcus MOF in unico puncto cum arcu FPN conjungitur; quod per finitam geometriam facile demonſtratur. Et quidem licet cuſpis oriatur ex nodo, mutata conditione loci Geometrici, ut in Concoide, ubi, ſi diſtantia poli ab axe citra & ultra quem recta aſſumi debet æqualis datæ ad partes poli ipſius, vel ad oppoſitas, ut ejus vertex motu continuo eam curvam deſcribat (quæ ipſius natura ipſa eſt), fuerit minor, quam ipſa recta data, habetur citra axem nodus, ſi æqualis, habetur cuſpis, ſi major, habentur bini flexus contrarii; adhuc tamen illa curva, quæ nodum habet, ſuam habet naturam peculiarem diverſam a reliquarum natura, & ſuas proprietates per finitam Geometriam accurate determinatas, ut Parabola inter Ellipſes, & Hyperbolas media, ſuam ſpeciem conſtituit, & ſuas proprietates habet, amiſſis eorum plurimis, quæ ad Ellipſim, & Hyperbolam pertinent, eo quod abierint in infinitum, vel evanuerint. Inter has proprietates eſt illa, quod nodus penitus evaneſcit, & ipſi non nodus quipiam infiniteſimus ſuccedit, ſed indiviſibile punctum. Adhuc tamen continuitatem omnino non lædi arbitramur. Nam ſi cuſpis conſideretur ſeorſum independenter a nodo, a quo eſt genita, in fig. 18; tangens in vertice V erit unica AB, & puncto per ipſam curvam excurrente motu continuo per OVP, tangens QOR mutatione directionis continua abibit in AVB, tum ſi cuſpis ſit primi generis, ut exhibet figura, mutatione itidem continua directionis ipſa tangens perget a poſitione AVB ad poſitionem TPS; nam ſi cuſpis eſſet ſecundi generis, directio illa a tangente per cuſpidem ducta

ducta retro regrederetur. Semper tamen ab una directione tangentis ad aliam per omnes intermedias directiones tranſibitur.

141. Nec obeſt, quod directio motus puncti, quæ prius in OV ſpectabat plagam B, deinde in VP incipiat ſpectare oppoſitam. Iccirco enim nulla omnino eſt vera cuſpis, in qua tangens non ſit communis tam arcui advenienti ad cuſpidem, quam inde redeunti, ut nimirum plaga B, quæ prius ſpectabatur, mutetur in plagam A oppoſitam in eadem recta, quas plagas vidimus num. 60. connecti quodammodo inter ſeſe in ipſo Infinito tanquam termino quodam communi. Hinc nimirum, & in Mechanica nihil turbat continuitatem deſcenſus gravium per eandem rectam, per quam aſcenderant, qui eum omnino læderet, ſi per aliam rectam deſcenderent, quod pariter accidit in oſcillationibus per curvas quaſcumque. Directio immutari poteſt immediate in oppoſitam e diametro, cum ∞ ex una plaga poſitum, quod reſpiciebatur, cum ∞ poſito ex plagæ oppoſita, quod deinde reſpicitur, ſit unicum punctum quodammodo, in quo crus rectæ infinitum cum alio crure oppoſito infinito conjungitur. Si directio mutari debeat utcunque, id in Mechanica, id hic in Geometria ſemper fiet per curvam continuam quandam, non per regreſſum ſaltu facto ab una directione ad alias ſine intermediis.

142. Idem accidit etiam in fig.6 curvaturæ arcus MHN, quæ mutatur motu continuo, dum punctum P excurrit per rectam continuam in ſe quodammodo redeuntem per H R ∞ Q H, quod exemplum rem, quam diximus, etiam evidentius declarat. Reſpicit ea curvatura ſemper centrum ſuum P, quod continua rectæ PG converſione excurrit motu itidem continuo per eam rectam, & ubi ipſum P ſuperato Infinito ex parte HR redit per QH, convertitur ad partes oppoſitas; in ipſo autem caſu rectæ AC utrumque ∞, tam verſus R, quam verſus Q æque reſpicit. Sic etiam ubi P per H tranſit, & circulus poſteaquam evanuit, abit ad partes oppoſitas, directio plagæ ab hiatu ſpectatæ tranſit per eandem ſemper rectam ad partes oppoſitas. Et idcirco etiam, ubi curvæ flexum contrarium habent, mutatio non ſit niſi radius circuli oſculatoris vel evanuerit, vel in infinitum excreverit, nec centrum ipſius ullo uſpiam ſaltu mutabit locum, nec plagam mutabit, niſi vel per punctum ipſum curvæ, vel per Infinitum traducatur, quod mille exemplis in Geometria illuſtrari poteſt. Hinc in puncto cuſpidis V in fig.18 habetur tangens cum utraque directione AVB, B'VA'. Quin immo etiam ubique utraque directio indifferenter conſiderari poteſt tum plagis oppoſitis congruentibus, tum fluxu lineæ in ipſo puncto O indifferentis per ſeſe tam ad directionem OQ, quam ad directionem OR. Nullus in iis omnibus ſaltus deprehenditur, nullus nimirum tranſitus a magnitudine ad magnitudinem ſine intermediis.

143. Sed

143. Sed nec habetur ullus ſaltus, ubi concipitur mutatio nodi figuræ 17 in cuſpidem figuræ 18. In illa dum nodus minuitur ultra quoſcumque limites, binæ tangentes AVB, A'VB' ad ſe invicem accedunt pariter ultra quoſcumque limites, & illo evaneſcente penitus congruunt, ac arcus MV, qui cum arcu VN conectebatur per nodum, jam connectitur immmediate per ſeſe in unico puncto, & continuatur. Rectæ illæ, KL, HG, ED eas habebant tendentias, ut nulla per V tranſiret in angulo MVN, ſed quævis ex iis relinqueret ad eandem plagam aliquem arcum VM, VN. Idem præſtant in fig. 18 eadem directione manente. At ibi tangebant aliquem arcum, hic nullum tangunt, deſtructo nimirum arcu, quem deberent contingere. Idem accidit, ubi circulus in punctum deſinit, evaneſcente radio. Rectæ quæ fuerant tangentes, remanent, & jam per illud punctum tranſeunt; ſed nullius arcus tangentes ſunt, cum is arcus eſſe deſierit.

144. Ubi conſideretur curva genita evolutione nodi abeuntis in cuſpidem, videtur lædi continuitas, quæ tamen tum etiam ſervatur omnino. Si nodus figuræ 17 evolvatur incipiendo a P, ad determinanda puncta genitæ aſſumi debent in tangentibus VA', IK, FH, CE, VB, OR ſegmenta æqualia arcubus VP, IVP, FIVP, CFIVP, VCFIVP, OVCFIVP. Nodo evaneſcente, & abeunte in cuſpidem figuræ 18, ſegmenta tangentium VA, IK, FH, CE, VB, quæ differebant a ſe invicem per arcus nodi, jam evadunt æqualia, & ſuccedit illi curvæ continuæ curva genita evolutione arcus VP cæpta in P figuræ 18, ſemicirculus, & curva genita evolutione arcus FV, adjecta ipſi recta æquali arcui VP, quæ quidem curvæ diverſæ a circulo naturæ ſunt, & continuitatem non ſervant. At ſi aſſumpto arcu VO æquali VP concipiatur curva genita evolutione incipiente in O per OVCFIVP, & in ſingulis genitis concipiantur terni arcus, in illa, intercepti puncto P, & tangente VA', tangente VA', & tangente VB, tangente VB, & tangente OR, in hac puncto O, & tangente VA, tangente VA, & tangente VB', tangente VB' & tangente VS, momento, quo cuſpis efformatur, & coeunt tangentes VA, VA', ac tangentes VB, VB', continuantur inter ſe priores bini, bini medii inter ſe, poſtremi bini inter ſe, & primi illi duo efformant curvam continuam genitam filo evoluto in fig. 18 ex VP, & advoluto VP, ut in cycloide fieri ſolet, quæ ita generat ſe ipſam, ſecundi integrum circulum, tertii curvam continuam genitam oppoſita evolutione, & advolutione arcuum VP, VO, facta cum additione in V rectæ ipſis æquali. Ante eam transformationem arcus illi binarum curvarum continuarum accedunt ad arcus continuos trium, in quas illæ deſinunt, & ad ſe ultra quoſcumque limites, ac ne curvatura mutetur per ſaltum, circulus ille remanet utriuſque novæ curvæ oſculator, quæ omnia admodum facile demonſtrantur. In omnibus hujus generis caſibus transformatione continuata, dum permutantur arcus locorum

Geo-

Geometricorum,& alii cum aliis, a quibus diſtabant, conjunguntur, vel alium unicum locum geometricum efformant, continuitate ab aliis translata ad alia, quæ prius cum aliis continuabantur, vel etiam deſinunt in bina loca Geometrica a ſe invicem prorſus diſtincta, & nulla jam communicatione continuitatis conjuncta, quædam etiam abrumpuntur, ſed ita, ut eo momento, quo abruptio fit, uniantur, & continuentur lineæ continuæ cum aliis, ac puncta, in quibus connexiones novæ fiunt, tangentes per ea ductæ, radii oſculatorum circulorum, & alia omnia ejuſmodi ad ſe invicem prius accedant ultra quoſcunque limites, donec penitus coeant.

145. Ubique in ejuſmodi caſibus, incredibilis quædam elucet Geometriæ induſtria in continuitate ſervanda, myſteriis etiam quibuſdam, ubi opus eſt, in ſubſidium vocatis, quibus evolvendis in quarto elementorum tomo operam iterum dabimus; ſed ad rem pro dignitate tractandam integra volumina nequaquam ſufficerent. Diximus autem Geometriæ induſtriam elucere. Nam figuræ, quas e fruſtis locorum ſimplicium, nobis nos efformamus, continuitatem non ſervant. Sed ea fruſta ita terminata Geometria, non agnoſcit; unde fit, ut proprietates generales, quæ ejuſmodi multilateris figuris conveniunt, ſemper traduci poſſint ad multilateras alias, in quibus uni interſectioni, inter bina loca Geometrica alia quævis ſubſtituitur, & ubi latus ab una ad aliam tendit, vel una directione ex parte finita, vel oppoſita etiam tranſgreſſo Infinito, ſi crura infinita occurant. Sed hic iterum immenſa ſe offerret ſeges nunquam ſatis reſecanda, &demetenda.

146. Simile quid accidit, ubi nos ipſi Geometriæ vim inferimus, & contra ejus naturam imus, continuatione, quam ipſa requirit, turbata, & interrupta, quo caſu pereunt interemptæ Geometricæ quantitates, violata illarum natura. Sic in fig.22, ubi recta perpendicularis ad AB motu continuo excurrit per R2, R3, R4, ordinatæ R2 P2, R3 P3 delatæ ad finitam magnitudinem R3E intereunt, & abeunt in imaginarias, reclamante Geometria, quæ requirit progreſſum puncti P2 ab arcu IE, ad EH, & P3 ab HE ad EI, & rectam perpendicularem fruſtra revocat, ut oſcillet ab una tangente ad aliam, cujus progreſſu in deſperationem acta quantitatem abruptam quodammodo velut interimit. Idcirco tranſitus a ſtatu reali ad imaginarium fit ſemper binarum quantitatum ſimul, (binæ enim ſunt revera etiam P2 P2', & P2' P2, quarum altera ſuccederet alteri in punctorum PP' progreſſu), ut ſint quæ ſibi mutuo ſervata Continuitate poſſint ſuccedere. Et quidem is velut interitus, quod etiam in illa diſſertatione tertii tomi noſtri notavimus, ſemper fit ita, ut acceſſus illarum binarum quantitatum ad ſe invicem ante coitum fiat, vel aucta velocitate reſpectiva in infinitum, vel imminuta, ut animantium etiam mors jam fervore nimio in febribus, accidit, jam languore quodam in ſenili reſolutione.

 147. Sal-

147. Saltum etiam in angulo diametri cum periphèria inevniunt aliqui, cum angulus acutus eo minor ad rectum majorem tranſeat, nec tamen unquam æqualis fiat. Sed hæc difficultas evaneſcit, ex iis, quæ diximus num.83, cum anguli mixtilinei ſpecie differant a rectilineis, & continuitas haberi debeat inter ea, quæ ſpecie non differunt. Sunt & in Mechanica ſaltus quidam, qui oriuntur e ſuppoſitionibus ſaltum involventibus, quas nos quidem idcirco impoſſibiles arbitramur. Ejuſmodi ſaltum quemdam in puncto extra ſphæricam ſuperficiem ſito, & attracto in omnia ejus puncta in ratione reciproca duplicata diſtantiarum, vel ita attracto in centrum quoddam, & primo quidem tranſverſim projecto, tum libere demiſſo projectione evaneſcente, notavimus contra Eulerum in Diſſertatione de motu corporis attracti in centrum virium ea lege, & alius ſimilis ſaltus obvenit Eulero notante in Mechanica, ubi vi decreſcente in ratione reciproca triplicata diſtantiarum punctum deſcribit ſpiralem logaritmicam, in quo caſu poſt finitum tempus deberet illud punctum advenire ad centrum, & deinde aut nullibi eſſe, ut ipſe cenſet, aut in infinitis punctis ſimul, ut nos ex natura ejus ſpiralis videmur nobis probare poſſe, atque alia pariter, & ſaltuum genera, & abſurda habentur plurima, ubi vires imminutis diſtantiis excreſcant in infinitum, & attractivæ ſint; quas nos, ut jam innuemus, in Natura nequaquam admittimus, qui vires in minimis diſtantiis volumus repulſivas, ut nihil uſquam in Natura infinitum evadat. Iis omnibus illuſtrandis vix integra volumina ſatis eſſent. Verum in iis ipſis caſibus, ubicumque de finitis quantitatibus agitur, Geometria, Mechanica, Facultates omnes legem Continuitatis ubique nobis objiciunt.

148 Sunt quidem nonnulla, quæ in finitis etiam magnitudinibus videntur ſaltum requirere, & inductionem turbare, quæ ad binas claſſes generaliter reducuntur. Primi generis ſunt ea, in quibus nos per ſaltum aſſumimus magnitudines quaſdam, intermediis omiſſis, non, quod non adſint; ſed quod in uſu vulgari non eodem nomine appellari ſoleant, vel quod ad nos minus pertineant. Secundi generis ſunt ea, in quibus mutatio fit tempuſculo perquam exiguo, quod ſub ſenſum vix, aut ne vix quidem cadat.

149. Ad primum genus reducuntur ipſæ etiam diſcretæ quantitates, nimirum numeri. Numeros dicimus unitatum aggregata, & fere alios numeros vulgus nequaquam conſiderat, nec aliis numeris dedimus nomen, niſi iis, qui ex continua unitatis additione fiunt. Ii ſaltu quodam procedunt, quia nos intermedias quantitates omittimus, nimirum omnes numeros ſurdos, & fractos, qui hiatum inter binos numeros quoſcumque proximos ſupplent omnem, neque enim ulla eſt diſtantia utcumque parva in ſe determinata ejuſdem numeri fracti, vel ſurdi a quovis numero integro, qua minor in aliquo alio fracto, vel

vel ſurdo non habeatur. Si concipiantur omnia, quæ haberi poſſunt numerorum nomina, ſive per fractiones ſpurias fiant, ſive per radicalium expreſsiones, ſive per alia ſigna in traſcendentaliter irrationalibus, ſeries in iis etiam continua habebitur; & quidem quidquid in Geometria fit per lineas nobis cognitas idem in Algebra finita, vel infiniteſimali præſtatur per ſymbola, & ſigna.

150. Eodem pertinent quædam, in quibus quantitas conſiderationi ſuppoſita habet principium, & finem, ac aſſumimus binas magnitudines, quarum initia a ſe invicem, & fines a ſe invicem certo intervallo diſtant intermediis omiſsis, quo in genere facilius erramus, ſi finis primæ cum poſterioris initio communis ſit. Sit in fig.25 curva quævis MN axe AB. Aſſumptis binis axis partibus CQ, QE, & erectis ordinatis CD, QP, EF, area PQEF videtur immediate ſuccedere areæ DCQP, a qua tamen differt per differentiam aliquam finitam, quæ inveniretur abſciſsis ex QP, EF rectis æqualibus CD, QP, & applicato ad earum vertices arcu DP. Mutatur igitur illa magnituper ſaltum. Ea difficultas facile ſolvitur notando, continuam ſeriem haberi debere inter ea, quorum initia, & fines motu continuo excurrunt, non inter ea quorum initia inter ſe, & fines inter ſe aliqua determinata diſtantia diſtant. Si hæc accipimus, nos accipimus binos ſeriei continuæ terminos omiſſis intermediis; intermedii autem ipſi facile habentur, dividendo certa quadam lege diſtantiam inter bina initia, & binos fines. In caſu expoſito ſi concipiatur, rectam *cq* motu continuo cum ſuis ordinatis *cd*, *qp* progredi a poſitione CQ ad poſitionem QE, area *dcqp* a magnitudine DCQP ad magnitudinem PQEF tranſibit per omnes intermedias ſine ullo ſaltu, quod idem contingeret, ſi deberet devenire ad aliquam, cujus principium diſtaret etiam utcumque a fine prioris QP, & interea ipſa *cq* continua quavis mutatione mutaretur, dummodo abeunte *cd* in illius poſterioris initium, abiret *qp* in ejus finem. Data curva MN, datis extremis binis areis, quæ ſemper per determinatam aliquam differentiam a ſe invicem different, data magnitudine cujuſvis intermediæ, ſemper Geometræ invenire poterunt locum illius *cq*, qui ejus magnitudinis aream exhibeat.

151. Bina ejuſmodi exempla proferemus ex Phyſica. Dies tam a Solis occaſu ad Solis occaſum, quam a Meridie ad Meridiem computata non eſt ſemper ejuſdem magnitudinis, ſed aliis anni temporibus, alia, licet inæqualitas prior poſteriore ſit minor, atque inde fit, ut horologia, quæ Aſtronomis, & univerſæ fere Europæ communia ſunt, cum Italicis Horologiis, & quævis horologia cum Sole accurate cohærere non poſsint, ſi motum æquabilem habeant. Concipiantur bini dies contigui, qui differant a ſe invicem per 10 minuta ſecunda. Videtur fieri ſaltus; tranſitur enim a primo ad ſecundum, ſine tranſi-

tu per intermedios. Reſponſio ad difficultatem patet, ex iis, quæ dicta ſunt. Initium ſecundæ diei diſtat ab initio diei primæ, & finis a fine per determinatam diſtantiam. Invenientur intermedia, ſi illa intervalla dividantur in aliqua ratione, ut initia continuo excurrant, & fines itidem continuo. Id fiet ſi conſiderentur dies omnes, qui pertinent ad loca poſita ſub eodem parallelo verſus Occidentem, donec ad noſtrum locum, Orbe terrarum perluſtrato, redeatur. Singula illa loca ſuos dies habent, qui ſeriem continuam conſtituunt incipientem in primo noſtro die, deſinentem in ſecundo. In his intermediis diebus omnes magnitudines intermedias inveniemus, ſine ullo ſaltu, qui quidem itidem appellantur dies. Nos tamen eos, qui ad nos non pertinent, conſiderare non ſolemus. Sunt & alii intermedii termini, qui ad nos pertinent, ſed qui aduuc conſiderari non ſolent. Diviſo utroque die in horas, & minuta, intervalla temporum a quavis hora primæ diei ad quamvis ſecundæ conſtituunt itidem ſeriem intervallorum continuam, ut ab hora prima primæ diei, ad horam primam ſecundæ, a primo quadrante primæ horæ illius ad primum primæ hujus, & ita porro. Hæc intervalla mutatione continua tendunt a primo die ad ſecundum. In uſu communi non ſolent appellari dies, appellantur tamen aliquando; nam diceretur, integros decem dies inſumpſiſſe, qui inſumeret tempus a ſexta hora primæ ad ſextam diei undecimæ.

152. Alterum exemplum huic admodum ſimile in oſcillationibus pendulorum haberi poteſt. Secunda oſcillatio a prima differt aliquando per plures digitos. At ſi prima, & ſecunda in eumdem quemvis partium numerum ſecetur, & aſſumantur arcus intercepti inter ſimiles ſectiones, conſtituent ſeriem continuam magnitudinum, quarum initia, & fines motu continuo excurrent ab initio, & fine prioris oſcillationis ad initium, & finem ſecundæ. In utroque caſu, & in aliis ejuſmodi eodem pacto ſe res habet, ac in illa area *dcqp* figuræ 25.

153. Secunda claſſis eſt quantitatum, in quibus tempore perquam exiguo, & inſenſibili fiunt mutationes ingentes. Hujuſmodi eſt exploſio tormenti bellici, quæ videtur fieri momento temporis vix admoto igne. Et tamen certum eſt, debere accendi particulas alias poſt alias, dilatari aerem, quod motum localem, adeoque tempus continuum poſtulat, ac globum per omnes velocitatum gradus a quiete accelerari. Pariter emiſſio luminis delati ad noſtros oculos a corpore lucido, videtur fieri momento temporis, at phœnomena Satellitum Jovis, & annuæ Fixarum aberrationes oſtendunt fieri propagationem tempore ſucceſſivo, quo nimirum lux a Sole ad nos fere centum milliariorum millia ſemiquadrante horæ percurrat. Pariter ſi lamina elaſtica vi ingenti prædita, & nonnihil compreſſa globum ha-

Digitized by Google

habeat contiguum; ubi ea libera ſibi relinquitur, momento temporis videtur globo celeritatem determinatam quandam, & ingentem tribuere, & tamen in eo etiam caſu, certiſſimum eſt apud omnes Mechanicos globum breviſſimo quidem tempore, ſed tamen aliquo, per omnes gradus accelerari. Ejuſmodi pariter ſunt ſexcenta alia, inter quæ bina, quæ in contrarium adduci ſolent, & tamen optimè cum continuitatis lege componuntur, vel eam etiam confirmant ſeligemus.

154. Eorum primum ſit reflexio, & refractio luminis, quam dicunt fieri in unico puncto, in appulſu radii ad novam ſuperficiem, ubi in reflexione tota celeritas perpendicularis ſuperficiei momento temporis extinguatur in primo caſu, producta æquali oppoſita, in ſecundo mutetur per ſaltum. Verum inflexionem illam non fieri per ſaltum in puncto, ſed per curvaturam quandam continuam, patet ex actione mutua inter lumen, & corpora, quæ conſtat ex diffractione a noſtro P. Grimaldo detecta, qua fit, ut radius in quadam diſtantia ab ea ſuperficie intorqueri incipiat, mutata ab ea actione velocitate perpendiculari per omnes intermedios gradus. Et quidem lumen non reflecti ob impactum in ſuperficiem conſtat, tum ex aliis multis, quæ Newtonus in Optica congeſſit, tum ex eo, quod quævis ſuperficies, ut vitri, quæ nobis quidem videtur leviſſima, aſperitates habet, & ſulcos inductos ab illo ipſo pulviſculo, quo poliuntur vitra, quæ aſperitates reſpectu particularum luminis ingentes turbarent reflexionem ortam ab impactu, & lucem quaquaverſum diffunderent. Eæ autem aſperitates nihil prorſus obſunt reflexioni ortæ a vi repulſiva agente in aliqua diſtantia.

155. Si enim P ſit particula luminis in fig.26, IEKF ſphæra, ad quam ſenſibilis actio corporum in lumen extenditur, AB ſuperficies bina media dirimens; donec illa ſphæra eſt tota in priore medio, radius ex omnibus partibus æqualiter attractus, vel repulſus, recta pergit. Ubi ea ſphæra jam novum medium ſubire cepit, intra quod ſit ejus ſegmentum CKD, actionum inæqualitas incipit. Si enim GH diſtet a centro æque, ac CD, ſegmenta GEPFH, CEPFD, æqualia, & ejuſdem medii æqualiter agent in particulam P, ſegmenta GIH, CKD diverſorum mediorum inæqualiter. Hinc habebitur vis quædam accedendi ad planum AB, vel recedendi, & ea vi incurvabitur ſemita, quæ ubi ob vim repulſivam obvenerit parallela ſuperficiei AB, curſum reflectet, & deſcribet arcum prorſus ſimilem præcedenti, & deſinentem ad ſenſum in rectam ad partes N ſimilem illi, per quam advenerat ex parte M. Si ſuperficies CD, fuerit inæqualis, & aſpera, ſed inæqualitates fuerint perquam exiguæ reſpectu totius illius ſphæræ, & ejus ſegmenti CKD, nulla ſenſibilis turbatio fiet orbitæ MPN, cum vis pendeat ab omnibus particulis ſitis intra ſegmentum CKD, non

a ſola

a ſola prima ſuperficie. Turbatio autem maxima, & luminis diſperſio habetur, ubi aſperitates majores ſint. Idem ibi accidit, quod in Tellure montibus, & vallibus aſpera. Gravia libere projecta Parabolas deſcribunt, ſecluſa aeris reſiſtentia, quæ nullam ſenſibilem turbationem patiuntur ab aſperitate idcirco, quod gravitas pendet a tota Telluris maſſa, reſpectu cujus montes ſunt inſenſibiles, non a ſola ſuperficie. At ſi globorum copia in Terram ſimul incurreret, & omnis abeſſet gravitas, ac Terræ ipſius ſuperficies eſſet elaſtica, reflecterentur omnes ii globi diverſiſſimis directionibus determinatis a planis, in quæ ſinguli incurrerent, ac diſpergerentur.

156. Secundum exemplum ſumatur ab aqua, quæ effluit ex aliquo vaſe, quam dicunt, ſi foramen fiat ſub altitudine aliqua, ſtatim egredi cum velocitate illa, quam acquireret in deſcenſu per altitudinem ipſam; ac proinde contendunt evincere illud, totam illam velocitatem momento temporis generari. At in eo caſu quamplurimi melioris notæ Mechanici diſerte affirmant ſe putare, illam ipſam velocitatem acquiri paullatim non totam momento temporis, quo poſito, omnis difficultas evaneſcit. Verum eam difficultatem nulla eſſe vi præditam pro demonſtranda læſione continuitatis, & ſaltu, nobis quidem evidentiſſimum eſt, atque id ipſum duplici via evincimus. Primo quidem evidens eſt, aquam non poſſe egredi cum velocitate majore ea, cum qua aufertur obſtaculum illud, quo foramen obſtruebatur. Hujus remotio pendet a velocitate, quam ipſi manus removens imprimit, quam velocitatem, videbimus paullo infra imprimi per omnes gradus: & qui contendat illam ipſam remotionem fieri, genita in illo obſtaculo velocitate finita momento temporis, omnino principium petit, nec ullam peculiarem difficultatem affert ex aquæ velocitate, quæ velocitatem recedentis obſtaculi ſuperare non poteſt.

157. At dices, quid ſi Deus momento temporis obſtaculum ipſum deſtruat, & foramen aperiat? In primis reſpondebimus, nos hic inductionem efformare ex iis, quæ in Natura contingunt, non ex iis, quæ contingerent, ſi Deus Naturæ leges violaret. Deinde in eo etiam caſu putamus manifeſto conſtare, velocitatem acquiri breviſſimo quidem tempore, ſed tamen aliquo, & per omnes gradus, prorſus ut accideret in globo ingenti vi laminæ elaſticæ excuſſo. Nam vis, qua aqua premitur æquivalet toti ponderi columnæ, quæ eamdem baſim, & altitudinem habeat, cum quo pondere æquilibratur, in vaſe æque lato, & cui æquivalet, ut facile demonſtratur in cæteris vaſorum figuris. Compreſſionem illam cenſemus admovere ad ſe invicem particulas aquæ per ſpatium inſenſibile quidem, ſed tale, ut vis repulſiva æquetur illi ponderi, cui, & omnino proportionalis invenitur, cum inveniatur proportionalis altitudini aquæ ſuperioris. Eam vim ſuſtinet, vis repulſiva lateris vaſis. Latere momento temporis aperto, vis

Digitized by Google

vis ea primas particulas accelerat, donec a conſequentibus recedant per omne ſpatium, in quo vis repulſiva agit. Porro idcirco acquiritur velocitas, quæ ſit ut radix quadrata altitudinis, quia ubi vires in aliqua ratione conſtanti inter ſe agunt per ſpatia æqualia, acquiruntur velocitates ſubduplicatæ virium ob id ipſum, quod vires tempuſculis æqualibus acquirunt velocitates proportionales ſibi, & tempori, tempuſcula autem, ubi majore vi jam velocitas major acquiritur, in ſingulis ſpatiolis breviora ſunt, unde fit, ut celeritas minus augeatur, quam vis. Ea œconomia tempus ſupponit, & omnes magnitudinum gradus intermedios. Quare ex ipſo illo effectu habetur maxima præſumptio pro ſucceſsiva ejuſmodi generatione. Saltem illud nobis eſt evidens, nullo pacto demonſtrari poſſe, non hoc potiſſimum pacto rem accidere, & ipſa inductio, ſi nihil aliud haberemus, cogeret hoc pacto conciliare ſecum hoc phænomenum, juxta ea quæ diximus num. 134.

158. Expoſita, & comprobata Lege Continuitatis, ac ſolutis iis, quæ contra ipſam obiici ſolent, aut poſſunt, reliquum eſt, ut occaſione ſolvendi oppoſitionem aliam, quæ fieri ſolet ex colliſione corporum, aperiamus Theoriæ noſtræ ortum, & eam ex ipſa Lege Continuitatis demonſtremus. Conſtitueramus quidem initio hujus diſſertationis, de eadem Theoria pluribus agere, at excreſcente jam nimium diſſertatione ipſa, id argumentum alteri diſſertationi, vel aliis pluribus reſervare cogimur, & quidem multa, quæ ad ipſam pertinent dedimus in diſſertatione de Viribus Vivis, multo plura initio ſecundæ partis diſſertationis de lumine; adhuc autem plura per hoſce ipſos dies a P. Carolo Benvenuto doctiſſimo e Noſtra Societate viro (qui noſtram in hac re mentem optime novit) in diſſertatione publicæ diſputationi proponenda brevi in Seminario Romano, potiſſimum quæ pertinent ad ipſam theoriam virium illuſtrandam, & ejus uſum per univerſam Phyſicam latiſſime patentem ab ipſo multo diligentius exculta, & perpolita publici juris fient. Quamobrem ſumma tantummodo capita theoriæ ipſius hic attingemus, & ea ex hac ipſa continuitatis lege demonſtrabimus, qua ſemel admiſſa, videtur nobis tam evidenter deduci theoria omnis, ut nihil præter meras cavillationes, ad infirmandam deductionem produci poſſit.

159. Sunt autem hæc ſumma theoriæ noſtræ capita. Primo quidem corpora ad immediatum contactum nunquam devenire, ſed in minimis diſtantiis habere determinationem quamdam recedendi a ſe invicem, quam appellamus vim repulſivam, quæ diſtantiis in infinitum imminutis, augeatur ultra quoſcumque limites ita, ut ſit par extinguendæ cuilibet velocitati, utcumque magnæ, auctis diſtantiis minuatur, donec penitus evaneſcat, tum tranſeat in determinationem accedendi, ſive vim attractivam, quæ primo augeatur, tum

Digitized by Google

decreſcat, & in repulſivam iterum tranſeat, idque per multas vices in exiguis diſtantiis, donec demum in majoribus diſtantiis evadat ad ſenſum reciproca duplicata diſtantiarum, atque id juxta conſtantem legem ordinatarum ad curvam quamdam continuam, & ſimplicem, quæ in ipſa abſciſſarum diſtantias referentium origine aſymptotum habeat parallelam ordinatis ipſis, tum axem in plurimis ſecet punctis hinc, & inde ſinuata, ac demum ex parte axis oppoſita priori aſymptotico cruri, crus aliud habeat aſymptoticum, exiſtente aſymptoto ipſo axe, & accedente cruris forma quamproxime ad formam cruris Hyperbolæ habentis ordinatas in ratione reciproca duplicata diſtantiarum. Inde colligimus materiam conſtare ex punctis prorſus indiviſibilibus, a ſe invicem aliquo finito intervallo diſtantibus, & ſoliditatem, ac cohæſionem repetimus a diſtantia limitis inter repulſionem in minori diſtantia, attractionem in majori; adeoque ſoliditatem, & extenſionem mathematicè continuam nequaquam admittimus.

160. Hæc noſtræ theoriæ ſumma; en ejus deductionem a lege Continuitatis. Concipiamus bina corpora delata in eamdem plagam, quorum primum habeat velocitatis gradus ſex, ſecundum vero duodecim. Ubi hoc ſecundum aſſequitur illud primum, deberet, ſi utrumque eſſet omnino durum, in ipſo momento temporis, in quo contactus fit, fieri mutatio velocitatis per ſaltum vel in altero, vel potius in utroque. Id quidem evidentiſſimum eſt, ſi corpora compenetrari non poſſunt, ut revera non poſſunt juxta num. 134, nam illud ſecundum ultra illud primum ferretur, & in ejus locum ſuccederet, ſi pergeret quovis utcumque exiguo tempuſculo moveri cum velocitate majore. Id ſane fatentur omnes, ſed duplici via occurrunt difficultati. Sunt qui corpora admittunt etiam dura, cujuſmodi ſaltem prima materiæ elementa Newtonus etiam admiſit, qui perfecte ſolida voluit ita, ut eorum partes continuo contactu cohærere poſſent per attractionem. Hi ſaltum a Natura excludendum eſſe non putant, inter quos Mac-Laurinus inprimis, nihil abſurdi in ipſo ſaltu agnoſcit. At horum ſententiam tota hæc diſſertatio enervat. Alii, ut Leibnitiani in primis omnes, e Natura rejiciunt omne corporum durorum genus, & idcirco, dicunt, mollia eſſe omnia corpora, vel elaſtica, ut nimirum paullatim partes introcedant, & dum figura mutatur, velocitatis diſcrimen gradatim juxta Continuitatis legem elidatur.

161. At hæc reſponſio ſaltum quidem tollit a totis corporum maſſis, non a primis ſuperficiebus, quæ ſe contingunt, & in quibus vis impenetrabilitatis exeritur. In primis illud ipſum ab ejuſmodi reſponſione nos removeret, quod ſi in ipſis elaſticis corporibus nullas particulas utcumque exiguas prorſus ſolidas admittamus, agnoſcenda ſit diviſio actualis materiæ in infinitum ſine ullo limite ita, ut nulli parietes ibi ſint ultimi, qui vacuo, & configuratione ad elaſticitatem neceſſa-

Digitized by Google

ceſſaria omnino careant, quod quam multa Infiniti myſteria, & vere etiam abſurda, ſecum trahat, ex iis, quæ ſupra de Infinito diximus, ſatis patet. Sed eo omiſſo, corpus quodcumque, utcumque habeat particulas in infinitum diviſas, omnino ſuperficies habet extremas, quæ ſi ad contactum devenitur, ſe immediate contingant. Hujuſmodi ſuperficies ſunt reales corporum termini indiviſibiles, juxta num. 16, nec dici poteſt pro ſuperficiebus haberi poſſe ſolida quædam infinite parva craſsitudine prædita, nam & infiniteſimas quantitates in ſe ipſis determinatas nullas eſſe, demonſtravimus num. 80, & ſi ſint, eorum interiores partes ad limitem extremum, adeoque ad ſuperficiem pertinere omnino non poſſunt. Nec aliud eſt compreſsio corporis figuram immutantis, niſi acceſsio extremarum ſuperficierum ad ſe invicem, quod in Diſſertatione de Viribus Vivis ſatis luculenter oſtendimus adjecto etiam ſchemate, quod modum compreſsionis exhiberet, conſiſtentis in eo, quod præcedentis ſuperficiei velocitate minore exiſtente jam, quam conſequentis, earum acceſſus habeatur.

162. Porro ſuperficies illæ, in quibus contactus fieret, deberent velocitatem mutare per ſaltum. Si enim prima ſuperficies ſecundi corporis aliquo tempore diviſibili poſtea, quam ſublata eſt omnis earum diſtantia, cum poſtrema primi corporis ad æqualitatem reducitur, erit aliquod momentum poſterius, quo illa habebit velocitatis gradus 11, hæc minus adhuc quam 11, ut 7, adeoque toto illo [illegible] tempore ſecundi corporis ſuperficies habuiſſet velocitatem majorem, quam ſuperficies primi, & proinde plus ſpatii percurriſſet, quod compenetrationem aliquarum corporis particularum induceret.

163. Evidens igitur eſt ſaltum in ipſis ſuperficiebus, ſalva impenetrabilitate evitari non poſſe, ſi cum illo velocitatum diſcrimine ad contactum devenitur, adeoque debent omnino, ante quam deveniatur ad contactum, mutari paullatim, & per gradus velocitates illæ corporum, retardata altera, altera accelerata. Quare debet haberi cauſa, quæcumque ea ſit, quæ retardationem, & accelerationem inducat, quæ quoniam mutat ſtatum corporum in ordine ad determinationem motus, & quietis, dicenda erit vis, & quoniam tendit ad removendum alterum corpus ab altero, dicenda erit vis repulſiva, quo nomine intelligenda erit determinatio, quam habebit, quævis materiæ particula recedendi ab alia quavis particula, dum ad eam accedere cogitur etiam ante contactum. Ea autem determinatio ſine actione in diſtans, & ſine ullo impulſu, poterit haberi vel in natura ipſa materiæ requirentis receſſum illum ſub conditione illius determinatæ diſtantiæ ab alia materia, vel per liberam legem Dei ſancientis eum receſſum in illa diſtantia, quo utroque modo etiam vis attractiva in majoribus diſtantiis ab ipſis diſtantiis pendens æque bene explicari poteſt ſine ulla actione in diſtans, & ſine ullo impulſu. Idea ejuſmodi

determinationis diſtinctiſſima eſt, & clariſſima. Miramur autem tantam difficultatem apud nonnullos haberi in admittenda hujuſmodi determinatione aſſumente pro conditione certam diſtantiam, cum ii omnes admittant ſimilem prorſus determinationem mutandi ſtatum, ubi diſtantia ſit nulla, ortam ex impenetrabilitate, quam cenſent agere in immediato contactu. Num eſt captu facilior, præjudiciis ſepoſitis, determinatio ſive a materiæ natura profluens, ſive a libera Dei vovoluntate, aſſumens pro conditione potius diſtantiam zero, quam diſtantiam determinatam quamcumque?

164. Porro ea vis repulſiva imminutis diſtantiis in infinitum debet augeri in infinitum ita, ut ſit par extinguendæ cuilibet velocitati utcumque magnæ. Si enim in uno caſu, ut in allato, extingueretur diſcrimen velocitatis in ipſo contactu; ubi in alio caſu corpus ſecundum majori velocitate præditum eſſet, deberet pervenire ad contactum, ante, quam totum diſcrimen velocitatum extingueretur; videmus enim, vires omnes breviori tempore minorem velocitatem gignere, vel extinguere, & majori differentiæ velocitatis reſponderet tempus brevius uſque ad contactum. Quare ne in poſteriore caſu habeatur in ipſo contactu differentia velocitatum, & ſaltus, debet in priore extingui totum diſcrimen ante, quam ad contactum immediatum deveniatur, ut nimirum in poſteriore caſu, per vim repulſivam in ulteriore, illo acceſſu exercitam majus illud diſcrimen extinguatur totum. Cumque idem diſcurſus redeat pro quavis utcumque magna velocitatum differentia, patet, ejuſmodi debere eſſe vim repulſivam, ut corpora nunquam ad immediatum contactum deveniant, & ipſa ſit par extinguendæ velocitati utcumque magnæ, adeoque ut imminutis in infinitum diſtantiis excreſcat ultra quoſcumque limites in infinitum, atque ita excreſcat, ut recta ipſi proportionalis ducta in rectam exprimentem diſtantias deſcribat aream infinitam (cum nimirum illi areæ in Mechanica demonſtretur proportionale quadratum velocitatis genitæ, vel deſtructæ) ad quam areæ infinitatem requiritur, ut vis decreſcat non minus, quam in ſimplici ratione diſtantiæ; nam ea ratio exhibet Hyperbolam Conicam inter aſymptotos habentem aream infinitam, & in omni Hyperbolarum familia eæ omnes, quæ ordinatas habent minus creſcentes, habent aream finitam, quæ habent magis creſcentes, habent ipſam aream itidem infinities magis infinitam.

165. Jam vero hinc eruitur, materiam conſtare e punctis prorſus indiviſibilibus, & inextenſis, a ſe invicem quodam ſemper intervallo disjunctis. Nam ejuſmodi repulſiva vis, cum nec relativa ſit relatè ad noſtros ſenſus, nec ab aggregati, & totius natura pendeat, debet per num. 135. tribui omnibus materiæ particulis. Unde fit, ut nulla pars materiæ ex aliis particulis contiguis conſtet, quæ nimirum vi il-

Digitized by Google

vi illa repulſiva in infinitum aucta deberent ſtatim a ſe invicem diſcedere; ac proinde oportet, primæ particulæ materiæ ſint omnes ſimplices, incompoſitæ, adeoque indiviſibiles, & a ſe invicem diſtantes, quæ cum nec illam virtualem extenſionem habere poſſint, juxta num.26, erunt puncta prorſus indiviſibilia, & inextenſa.

166. Quoniam autem in majoribus diſtantiis habetur determinatio accedendi ad ſe invicem, quod conſtat ex generali gravitate a Nevvtono detecta, quæ in immenſum protenditur, & ſequitur ad ſenſum rationem reciprocam duplicatam diſtantiarum, ac ex ipſa cohæſione corporum, cum nimirum anteriorem partem adductam poſterior conſequatur; patet vim illam repulſivam, quæ minutis in infinitum diſtantiis creſcit in infinitum, adeoque iis auctis decreſcit, alicubi ita decreſcere, ut evaneſcat, ac deinde directione mutata, ut curvarum ordinatis ſæpe accidere vidimus num.112, in attractivam migret, ubi habebitur neceſſario limes quidam inter repulſionem, & attractionem, in cujus limitis diſtantia ſi ponantur bina puncta materiæ, quieſcent, nulla vi attracta, nulla repulſa, at ea diſtantia utcumque imminuta, agente jam vi repulſiva conabuntur recedere a ſe invicem, ea aucta, adeoque agente jam vi attractiva, conabuntur accedere ad ſe invicem; unde fiet, ut in ea diſtantia conſtituta, eam tueri conentur, & altero verſus alterum promoto, hoc poſterius cogatur progredi, illo tracto verſus partes oppoſitas, hoc ipſum cogatur conſequi, conanti autem alterum ad alterum adducere, vel alterum ab altero abducere, reſiſtant, in quibus phænomenis conſiſtit tota cohæſionis, & ſoliditatis notio, quam per ſenſus acquirere poſſumus; quamobrem ejuſmodi limites dicimus *limites cohæſionis*.

167. Porro ejuſmodi limitis, ſive tranſitus a vi repulſiva in minoribus diſtantiis ad atractivam in majoribus, imaginem ſenſibilem habemus in elaſtica forcipe, qua per hyemem carbones accenſos tractamus, cujus cuſpides ſi plus æquo admoveantur, determinantur ad mutuum receſſum, ſi plus æquo removeantur ad acceſſum. Sed & alterius generis limites admitti debent, in quibus ab attractione ad repulſionem, auctis diſtantiis fiat tranſitus, cum videamus aquæ particulas cohærentes, adeoque in priore limite poſitas, abire deinde in vapores, quorum particulæ maxima vi a ſe invicem conentur recedere, in quibus proinde & repulſioni in minimis diſtantiis attractio in paullo majoribus, & iterum in aliis majoribus repulſio, ac iterum in maximis, in quibus mutua gravitas agit, attractio ſuccedat. Quin immo plurimos eſſe hujuſmodi tranſitus, & limites, conſtat ex eo ipſo, quod multa corpora poſt iteratas compreſſiones in reſpectiva quiete perſeverent, novos nimirum, & propiores cohæſionis limites aſſecuta. Hoc autem ſecundum limitum genus a priore illo plurimum differt, cum bina puncta in ejus limitis diſtantia conſtituta quieſcant,

ſed

Digitized by Google

ſed utcumque parum ea immutata, cogantur ab ea magis recedere; cum nimirum, imminuta diſtantia, habeatur vis attractiva, quæ ipſam adhuc magis imminuat, eâdem aucta agat repulſio, quæ ipſam augeat adhuc magis.

168. Porrò hujuſmodi virium alternationes & tranſitus etiam Nevvtonus admiſit in Quæſtionibus Opticis ſub finem, licet ipſe in minimis deinde diſtantiis attractionem ultimam voluerit, & contactum, non repulſionem. Tranſitus autem ipſos explicat exemplo quantitatum poſitivarum, & negativarum in Algebra, cum in Mechanica neceſſe eſſe cenſeat, ubi vis attractiva deſinit, incipere vim repulſivam; ut in Algebra ubi quantitates poſitivæ deſinunt, debeant incipere negativæ. Verum ibi notandum illud, quod & in noſtra Algebra ſecundo Elementorum noſtrorum tomo demonſtravimus, & eruitur ex iis, quæ dicta ſunt num.112: non eſſe verum, eo ipſo, quod aliqua quantitas poſitiva eſſe deſinit, neceſſario in negativam migrare debere, & viceverſa; cum nimirum aliquando poſt acceſſum ad nihilum retro etiam quantitas redeat, nec ipſum tranſgrediatur. Eſt autem generalis regula, in iis etiam, quæ in ipſa Algebra noſtra demonſtravimus, ex qua regula cognoſci poſſit, an per nihilum tranſire debeat quantitas ipſa, an inde regredi. Nimirum ſi ubi ad nihilum devenit, ejus magnitudo decreſcat in ratione, quæ ſit eadem accurate, vel infinities proxime, quam habet aliqua potentia impar diſtantiæ ab ipſo nihilo, tranſiliet; ſi in ratione, quam habet aliqua potentia par, regredietur. Mutata enim diſtantia a nihilo, & abeunte ultra ipſum, ejus potentiæ impares mutantur etiam ipſæ e poſitivis in negativas, vel viceverſa, pares manent; adeoque idem formulæ algebraicæ, vel quantitati cuivis eam rationem habenti debet evenire. quod itidem in Geometria ſervatur ſanctiſſimè, ut nimirum curva linea ad axem delata debeat ipſum ſecare, & tranſgredi mutata directione ordinatarum, vel contingere, & regredi ipſa ſervata, prout ordinatæ ipſæ fuerint ibi accuratè, vel in infinitum proximè in ratione potentiæ cujuſpiam gradus imparis, vel paris ſuæ diſtantiæ a puncto illo, in quo ad nihilum deveniunt, & evaneſcunt.

169. Inde autem conſequitur, vim hoc modo traductam per nihilum, & jam abeuntem in attractivam, jam iterum in repulſivam non eſſe vim quamdam multiplicem &, indigentem pluribus cauſis, quam ſi tantummodo attractiva eſſet. Simpliciſſima ejus lex erit, ſive ſemper negativa, ſive e poſitiva in negativam migret, & ipſa ejus natura requiret tranſitus illos, ſi ejuſmodi ſit, ut alicubi prope loca, in quibus evaneſcit, ſequatur rationem illam potentiæ imparis potius, quam paris. Poterit ea per ſimpliciſſimam etiam Algebraicam formulam exprimi, cujus valor imminuto valore variabilis diſtantiam referentis in infinitum creſcat, & negativus ſit, tum eo aucto, jam e negati-

Digitized by Google

gativo in poſitivum migret, jam e poſitivo in negativum; donec, eodem ſatis, excreſcente ſit ſemper poſitivus, & accedat quamtumlibet ad rationem reciprocam duplicatam diſtantiarum. Quamobrem poterit per ſimplicem curvam etiam Algebraicam exprimi, quæ in initio ordinatarum aſymptotum habeat parallelam ordinatis in infinitum creſcentibus ex ea parte, ac ex oppoſita decreſcentibus, donec ipſa curva axem ſecet, ac reſecet vicibus quotlibuerit, & in punctis quibuſcumque ad arbitrium; deſinat autem in crus infinitum habens pro aſymptoto ipſum axem, & jacens ad partes ejus oppoſitas, ac accedens quantumlibet ad formam Hyperbolici cruris habentis ordinatas in ratione reciproca duplicata diſtantiarum. Atque hæc ipſa eſt forma curvæ, qua nos noſtram virium theoriam exprimimus. Ut vero ejuſmodi curva ſimpliciſſima in ſe eſſe poteſt, & continuæ, ac conſtantis naturæ, ita & virium lex non multiplex erit, ſed unica, & ab unica vel punctorum materiæ natura, vel Artificis Divinis libera voluntate pendebit.

170. Porro mirum ſane, quam ea, licet unica ſit, ad omnes generales, & particulares corporum proprietates explicandas conducat. Primus ille ramus aſyptoticus impenetrabilitatem, poſtremus gravitatem, intermedii limites varia cohæſionum genera, & diſcrimen inter corpora elaſtica, & mollia, ſolida, & fluida, ac alia ejuſmodi, ſinus illi multiplices fermentationem, & inflammationem, emiſſionem vaporum, & luminis, quamvis conſtante, & non diſrupta maſſa quæ emittit, atque alia ſexcenta ejuſmodi mirum in modum expediunt; ubi illud facile perſpicitur, cur tanta corporum omnium ſimilitudo ſit in iis, quæ pertinent ad impenetrabilitatem agentem in minimis diſtantiis, & gravitatem in majoribus, tantum autem diſcrimen in reliquis, e quibus pendent operationes chymicæ, nutritiones, & alia omnia adeo mira, & varia Naturæ opera. Sed de his ſatis multa in illa ipſa diſſertatione de lumine demonſtrata protulimus, & multo plura a P. Carolo Benvenuti per hoſce ipſos dies, ut innuimus, proferuntur.

171. Illud unum hic addemus, quod ad ſpatii ideam pertinet in hac noſtra ſententia realem Mathematice continuam extenſionem, a corporibus excludente. Nos præter puncta materiæ realia, admittimus reales exiſtendi modos, per quos ibi ſint, ubi ſunt, quod admittere omnino debent, qui locum ponunt in ordine coexiſtentium, vel reale ſpatium admittunt, ne quotieſcumque exiſtant, quæ exiſtunt, eundem ordinem habeant, vel in eadem ſpatii parte ſint. Illi ipſi modi ſunt nobis realia, & immobilia punctorum loca, quæ ubi exiſtunt, fundant realem relationem diſtantiæ inter ſe, & ipſa materiæ puncta, ad quæ pertinent. Eorum poſſibilitas indefinite a nobis cognita eſt nobis ſpatium imaginarium continuum quidem, & infinitum, quia cum nullum ſit punctum loci poſſibile ita proximum alteri, ut aliud propius,

aut

aut remotius eſſe non poſſit, in poſſibilibus indefinite cognitis nullus habetur hiatus, nullus terminus, qui ſemper in exiſtentibus adeſt.

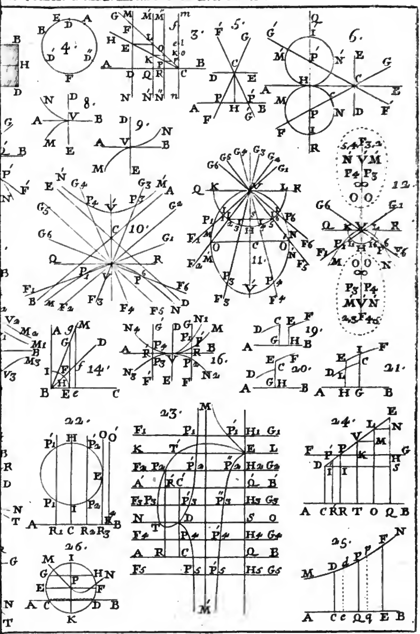
172. Porro cum illi reales exiſtendi modi realem diſtantiæ relationem inducant, a caſu compenetrationis, qui per alios ab iis diſtinctos exiſtendi modos haberetur, realem etiam, non continuam, ſed diſcretam extenſionem conſtituunt, in quo nihil abſurdi eſt: extenſum enim continuum ab inextenſis conſtitui non poteſt, non vero diſcretum in expoſito ſenſu, in quo evidentiſſimum eſt, phænomena extenſionis, quæ ſupra innuimus, ut a nobis cognoſcuntur per ſenſus, eadem fore.

173. Sunt, qui vereantur, ne in noſtra theoria nullum, ſit diſcrimen noſtrorum punctorum a ſpiritibus, quibus ſi eædem illæ vires tribuantur, extenſam in eodem noſtro ſenſu maſſam efformabunt. At bina habemus diſcrimina inter materiam, & ſpiritus nobis utcumque notos. Illa vi cognoſcendi cenſetur carere, & impenetrabilitate, ac extenſione prædita eſt, hi vi cognoſcendi pollent, impenetrabilitate, & extenſione carent. Idcirco autem his carent, quia illis ipſis viribus carent. Si vires haberent eaſdem, adhuc per potentiam cognoſcendi diſtinguerentur a materiæ punctis, ſed impenetrabilitatem haberent, & maſſas extenſas formarent, quo caſu an adhuc ſpirituales ſubſtantiæ dici deberent, lis eſſet de nomine.

174. Supereſſent alia quamplurima, ſed illud, ut fidem datam numer. 35 liberemus, nequaquam omittendum; in noſtra ſententia nec quietem punctorum, nec regreſſum ad eumdem locum, aut appulſum ad locum, in quo fuerit, vel ſit aliud punctum, ſeu conjunctionem unius puncti ſpatii, cum ſerie continua momentorum temporis, vel cum momentis a ſe diſtantibus pro eodem puncto materiæ vel pro binis haberi poſſe in Natura. Primum patet ex eo, quod viribus ad immenſas etiam diſtantias pertinentibus, ad motum puncti cujuſvis debent mutari vires punctorum omnium, adeoque ipſa in perpetuo eſſe motu; ſed utrumque facile demonſtratur ex eo, quod cum punctorum ſpatii in quavis linea recta, linearum in quovis plano, planorum in toto ſpatio numerus ſit infinitus, numerus autem punctorum materiæ finitus, numerus momentorum ejuſdem generis, ac numerus punctorum in quavis recta; infinita tertii ordinis eſt improbabilitas pro quovis momento pro determinato appulſu cujuſvis puncti materiæ ad quodvis punctum loci, in quo ipſum fuerit alias, vel in quo fuerit aliud punctum materiæ, vel tum ſit, & infinita ſecundi ordinis, pro momentis omnibus indefinite ſumptis. Ex quibus conſtant, quæ in eo numero demonſtratione indigebant. Sed contrahenda jam vela ſunt, & conſiſtendum.

F I N I S.

Digitized by Google



Digitized by Google

5. 3. 231

Digitized by Google

005663256

Digitized by Google

Digitized by Google